

USQ
Grado en Física

Módulo de Física Especializada

ELECTRODINÁMICA

CLÁSICA

Alberte José López Freire
Tercer Curso del Grado en Física - USQ
Curso 2021-2022

Advertencia:

Los presentes apuntes pueden contener errores, erratas o imprecisiones. No son una elaboración propia sino una recopilación de contenidos que creo importante para @ asignatura. Se han consultado:

- Apuntes del Profesor Alfonso Fombado (USC) / Anotaciones del Profesor Javier Castro.
- Resúmenes y apuntes del Dr. de Física: Doral, Lema, Gimil etc.
- Libros: Griffiths, Aguilo, Zangwill, Wagners, Feynman...

Índice

Bloque I: Propagación de ondas electromagnéticas

1. Teoremas de Conservación
2. Ondas Electromagnéticas
3. Ondas confinadas

Bloque II: Radiación Electromagnética

4. Campos de fuentes extendidas
- 5-6. Potenciales Electromagnéticos y campos de cargas puntuales.

Bloque III: Electromagnetismo y Relatividad Especial

7. Relatividad Especial y Formulación Covariante.
8. Mecánica Relativista.

Electrodinámica Clásica

BLOQUE I

PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

"La teoría del campo eléctrico de Faraday y Maxwell representa probablemente la más profunda transformación en los fundamentos de la física desde los tiempos de Newton"

A. Einstein

Advertencia:

Los presentes apuntes pueden contener errores, erratas o imprecisiones. No son una elaboración propia sino

una recopilación de contenidos que creo importante para @ asignatura. Se han consultado:

- Apuntes del Profesor Alfonso Fandos (USC)
- Resúmenes y apuntes del Dr. de Física: Doral, Lema, Goimil etc.
- Libros: Griffiths, Aguilo, Zangwill, Wagners, Feynman

Electrodinámica Clásica

TEMA 1

Teoremas de Conservación



1. Conservación de la energía electromagnética

Estudiemos en un primer lugar como se expresa la conservación de la energía en presencia de campos eléctricos y magnéticos.

Partiendo de:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \vec{H} \cdot \underbrace{(\nabla \times \vec{E})}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} - \vec{E} \cdot \underbrace{(\nabla \times \vec{H})}_{\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \\ &= -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j}_f\end{aligned}$$

Integramos ahora en un volumen fijo V .

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \, dV &= - \int_V \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV \\ &\quad - \int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} \, dV\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia:

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = - \int_V \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV - \int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} \, dV$$

Identificamos términos:

- Como el trabajo realizado sobre una carga dq viene dado por $W = dq (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \, dt = dq \vec{E} \cdot \vec{v} \, dt$, si en el

sistema solo hay fuentes libres y $dq = \rho dV$, $\vec{T} = \rho \vec{v}$.

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j}_f$$

Potencia perdida por el campo electromagnético (se transforma en otro tipo de energía, ej. calor)

• Si considerásemos el caso estático $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

y

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = - \int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} dV$$

Si la energía no cambia en el caso estático, la potencia perdida/ganada por el campo debe de ser igual a la que fluye por la superficie frontera S .

$$P_{\text{sup}} = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Vector de Poynting (Densidad de flujo de energía)

• Por las consideraciones anteriores, el término anterior debe corresponder en la variación de la energía electromagnética (proceso puramente electromagnético / \vec{E} , \vec{H} univectores)

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV$$

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (u_e + u_m) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Por un medio lineal:

$$\begin{cases} u_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \stackrel{\text{lin.}}{=} \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \\ u_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \end{cases}$$

Densidades de
energía eléctrica
y magnética

En conclusión, escribimos el **TEOREMA DE POYNTING**

$$\int_V \vec{J}_f \cdot \vec{E} \, dV + \frac{d}{dt} \int_V u_{em} + \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = 0$$

\uparrow dW/dt
 \uparrow $P_{\text{superficie}}$

$$\vec{J}_f \cdot \vec{E} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

Forma diferencial

"El trabajo de la fuerza electromagnética sobre las cargas es igual a la disminución de la energía almacenada en los campos más la energía que fluye a través de la superficie S ."

Ejemplos cuestiones Teorema de Poynting

* Si una resistencia se calienta cuando circula una corriente a través de ella, la integral

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{a}$$

sobre su superficie S es: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) Necesitamos más datos.

Admitiendo que una resistencia no almacena energía, por el Teorema de Poynting:

$$\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a} + \frac{dU_{en}}{dt} + \int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} dV = 0 \Rightarrow \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{a} = - \int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} dV = - \frac{I^2 \cdot R}{> 0} < 0$$

Luego la respuesta correcta es la (b).

* El teorema de Poynting en el espacio libre con fuentes:

- Se deduce de las ecuaciones de onda homogéneas.
- Se deduce de las ecuaciones de onda inhomogéneas
- Es consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell
- Relaciona las invariaciones relativistas de los campos.

Tal y como hemos visto al principio de esta sección, el Teorema de Poynting es consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell, empleando únicamente estas relaciones, llegamos a la formulación del Teorema. Luego la opción correcta es la (c).

* En ausencia de corrientes libres, la energía que un sistema electromagnético de geometría fija intercambie con el exterior se representa por

- Un trabajo mecánico
- Una integral de flujo
- Una integral de línea
- Un tensor antisimétrico

Por el teorema de Poynting $\frac{d}{dt}(U_{en}) + \int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} = - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a} \Rightarrow$ la variación de la energía vendrá dado por una integral de flujo. (b)

2. Conservación del momento lineal

Por la expresión de la Fuerza de Lorentz, el fuerza electromagnético sobre un volumen V vendrá dado por

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho \, dV = \\ &= \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) \, dV\end{aligned}$$

Así, la fuerza por unidad de volumen será:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

El objetivo es expresar \vec{f} de forma más compacta.

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

$$\text{Como } \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$$

Sin más que sustituir:

$$\vec{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] - \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Empleando la identidad vectorial

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{F}) = (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{F} \times \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \times \nabla \cdot \vec{F}$$

$$\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \nabla(E^2) - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E}$$

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \nabla(B^2) - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

Resultado así:

$$\vec{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Esta expresión parece más complicada que la original.
 No obstante, puede simplificarse definiendo un tensor de
 orden 2 denominado Tensor de Tensiones de Maxwell:

$$\mathbb{T} \equiv \varepsilon \left(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbb{I} \right) + \frac{1}{\mu} \left(\vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbb{I} \right)$$

$$T_{ij} \equiv \varepsilon \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

Este tensor tiene la particularidad de que $(\nabla \cdot \mathbb{T})_j = f_j$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbb{T})_j &= \varepsilon \left[(\partial_i E_i) E_j + E_i (\partial_i E_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_i E^2 \right] \\ &+ \frac{1}{\mu} \left[(\partial_i B_i) B_j + B_i (\partial_i B_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_i B^2 \right] + \dots \\ &+ \dots = \varepsilon \left[(\nabla \cdot \vec{E}) E_j + (\vec{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] \\ &+ \frac{1}{\mu} \left[(\nabla \cdot \vec{B}) B_j + (\vec{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right] \end{aligned}$$

De esta forma, la fuerza por unidad de volumen se
 escribirá como:

$$\vec{F} = \nabla \cdot \vec{\Pi} - \epsilon \mu \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$$

y el fuerza total

$$\vec{F} = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{A} - \epsilon \mu \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} dV$$

Por la Segunda Ley de Newton:

$$\frac{d\vec{p}_{mec}}{dt} = \vec{F} = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{A} - \epsilon \mu \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} dV$$

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p}_{mec} + \epsilon \mu \int_V \vec{S} dV \right) = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{A}$$

Definiendo el momento (lineal) electromagnético:

$$\vec{G} \equiv \epsilon \mu \int_V \vec{S} dV \quad \vec{g} \equiv \epsilon (\vec{E} \times \vec{B})$$

escribiremos la conservación del momento lineal como:

* TEOREMA DE CONSERVACION DEL MOMENTO LINEAL EN ELECTRODINAMICA

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p}_{mec} + \vec{G} \right) = \oint_S \vec{\pi} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{f} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{\pi}$$

• Interludio: Propiedades producto tensorial

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \\ \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \end{array} \right\} \vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x v_x & u_x v_y & u_x v_z \\ u_y v_x & u_y v_y & u_y v_z \\ u_z v_x & u_z v_y & u_z v_z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (\vec{u} \otimes \vec{v}) \vec{w} = \vec{u} (\vec{v} \cdot \vec{w})$$

$$\rightarrow \text{Tensor adjunto } \tilde{\pi} : \vec{u} \cdot \pi \vec{v} = \vec{v} \cdot \tilde{\pi} \vec{u}$$

$$\rightarrow \text{Divergencia} : \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \pi) = \nabla \cdot (\tilde{\pi} \vec{u})$$

$$\rightarrow \pi \equiv \vec{u} \otimes \vec{v} \Rightarrow \tilde{\pi} = \vec{v} \otimes \vec{u}$$

$$\rightarrow \int_V \nabla \cdot \pi \, dV = \oint_S \pi \cdot \hat{n} \, dA$$

$$\rightarrow \vec{F} \parallel \hat{n} \Rightarrow (\vec{F} \otimes \vec{F}) \cdot \hat{n} = F^2 \hat{n}$$

$$\rightarrow \vec{F} \perp \hat{n} \Rightarrow (\vec{F} \otimes \vec{F}) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\rightarrow (\vec{r} \times \pi) \vec{u} = \vec{r} \times (\pi \vec{u}) \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{r} \times \pi) = \vec{r} \times \nabla \cdot \pi$$

Fuerzas sobre medios materiales

El Tensor de Maxwell es simétrico en medios l.h.i (y en el vacío, tridiverte).

* El elemento T_{ij} se puede interpretar como la fuerza por unidad de área en la dirección i sobre un elemento de área orientado en la dirección j (en el caso estático)

$$\vec{F} = \oint_S \Pi \cdot \hat{n} dA$$

El tensor puede expresarse como la suma de la parte eléctrica $\Pi^{(E)}$ y la parte magnética $\Pi^{(M)}$

$$\Pi = \Pi^{(E)} + \Pi^{(M)}$$

- Parte eléctrica

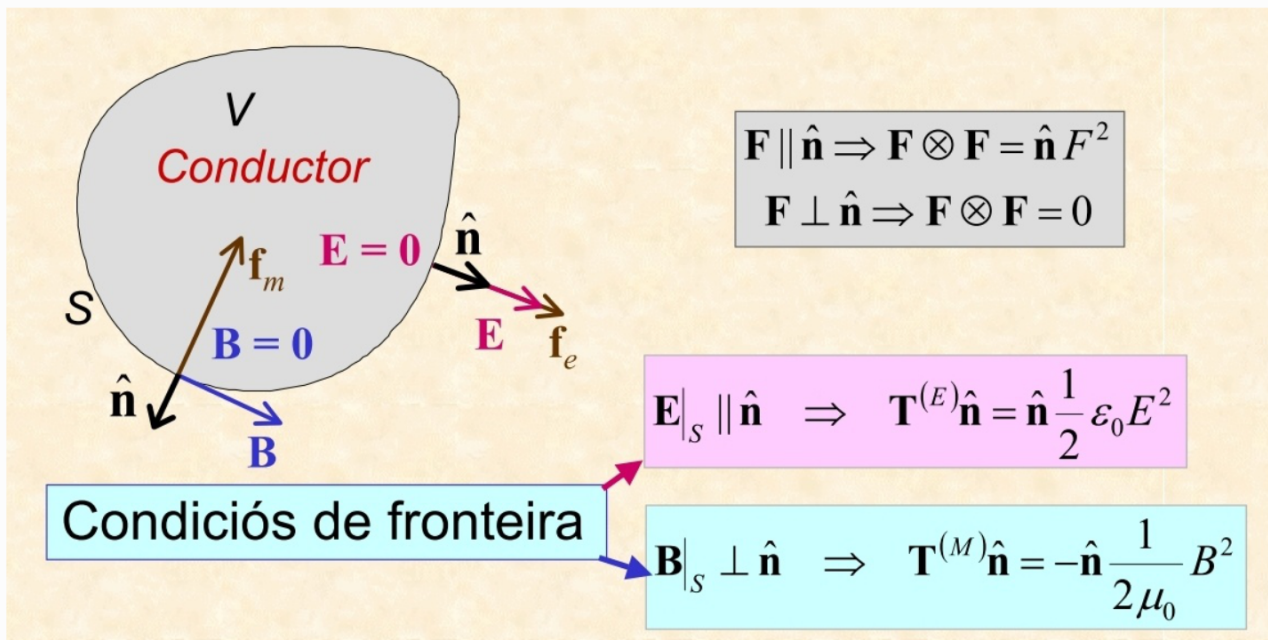
$$\Pi^{(E)} \cdot \hat{n} = \epsilon \left(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbb{I} \right) \cdot \hat{n} = \begin{cases} (\vec{E} \parallel \hat{n}) : \Pi^{(E)} \hat{n} = \frac{\epsilon}{2} E^2 \hat{n} \\ (\vec{n} \cdot \vec{E}) : E \\ (\vec{E} \otimes \vec{E}) \cdot \hat{n} = (\hat{n} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} \\ (\vec{E} \perp \hat{n}) : \Pi^{(E)} \hat{n} = -\frac{\epsilon}{2} E^2 \hat{n} \\ (\vec{n} \cdot \vec{E}) : 0 \end{cases}$$

- Parte magnética

$$\Pi^{(M)} \cdot \hat{n} = \frac{1}{\mu} \left(\vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbb{I} \right) \cdot \hat{n} = \begin{cases} (\vec{B} \parallel \hat{n}) : \Pi^{(M)} \hat{n} = \frac{B^2}{2\mu} \hat{n} \\ (\vec{B} \otimes \vec{B}) \cdot \hat{n} = (\hat{n} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} \\ (\vec{B} \perp \hat{n}) : \Pi^{(M)} \hat{n} = -\frac{B^2}{2\mu} \hat{n} \end{cases}$$

Por las condiciones de frontera en la superficie de un conductor perfecto

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}|_S \parallel \hat{n} \Rightarrow \mathbf{T}^{(E)} \cdot \hat{n} = \hat{n} \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (\text{Normal, hacia afuera}) \\ \vec{B}|_S \perp \hat{n} \Rightarrow \mathbf{T}^{(M)} \cdot \hat{n} = -\hat{n} \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (\text{Normal, hacia dentro}) \end{array} \right.$$



3) Conservación del momento angular

Por las propiedades de los tensores ya vistos:

$$\int_V (\vec{r} \times \nabla \cdot \Pi) dV = \int_V \nabla \cdot (\vec{r} \times \Pi) dV = \oint_S (\vec{r} \times \Pi) \cdot \hat{n} dA$$

Tomando $\vec{P}_{mec} = \int_V \tilde{\rho} \vec{v} dV$ y empleando el Teorema de Conservación del momento lineal:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \tilde{\rho} \vec{v} dV + \epsilon \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) dV \right) = \int_V \nabla \cdot \Pi dV$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\int_V \tilde{\rho} \vec{r} \times \vec{v} dV}_{\vec{L}_{mec}} + \epsilon \int_V [\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})] dV \right) &= \int_V \vec{r} \times (\nabla \cdot \Pi) dV \\ &= \oint_S (\vec{r} \times \Pi) \cdot \hat{n} dA \end{aligned}$$

Definiendo el momento angular electromagnético:

$$\vec{L}_{em} = \int_V (\vec{r} \times \vec{g}) dV$$

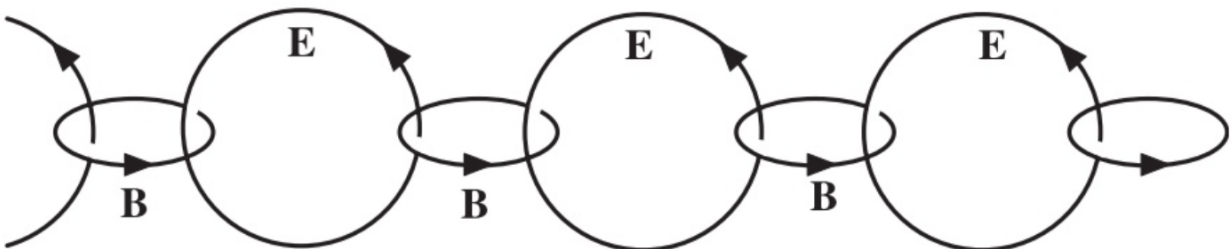
* Teorema de conservación del momento angular en
Electrodinámica

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_{mec} + \vec{L}_{em}) = \oint_S (\vec{r} \times \vec{\Pi}) \cdot \hat{n} dA$$

Electrodinámica Clásica

TEMA 2

Ondas Electromagnéticas



→ **Ondas**: Son funciones matemáticas $\Psi(\vec{x}, t)$ que describen como una perturbación se propaga a lo largo de un medio continuo. Sus valores en t y $t + \delta t$ están relacionados mediante un operador de propagación \mathcal{P}_t

$$\Psi|_{t+\delta t} = \mathcal{P}_t \Psi|_t$$

Caso más simple $\Psi(\vec{r}, t + \frac{s}{v}) = \Psi(\vec{r} - \hat{v}s, t)$

1. Ecuación de ondas en medio l.h.i.

Consideremos un medio l.h.i. sin cargas libres $\rho_c = 0$ ni corrientes aplicadas ($\vec{J}_c = 0$). Para este caso las ecuaciones de Maxwell quedan como:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

Mediante la relación $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla \nabla \cdot \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}$

vemos que:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\cancel{\nabla \cdot \vec{E}}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B});$$

$$\mu \sigma \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \text{y: } \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \nabla \times \left(\mu\sigma \vec{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \\ &= -\mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ecuaiones de onda vectoriales para los campos

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (3)$$

con $\vec{u} \cdot (\nabla^2 \vec{F}) = \nabla^2 (\vec{u} \cdot \vec{F})$.

Las ondas electromagnéticas son las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre (de fuentes). Equivalentemente se obtienen como soluciones de las ecuaciones de ondas a las que les imponemos las ecuaciones de Maxwell.

2. Ondas planas en medios l.h.i. no dispersivos

En medios no dispersivos y sin pérdidas las ecuaciones vectoriales de ondas resultan de la forma:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

Ecuaciones de onda en medios no dispersivos y sin pérdidas.

Por las propiedades de la ecuación de ondas, la velocidad de propagación de la onda solución será:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad n = \frac{c}{v} \quad (\text{índice de refracción})$$

Nótese que mientras el medio sea l.h.i. podremos emplear las relaciones constitutivas

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Cada componente ψ de los campos verifica la ecuación de ondas tridimensional:

$$\nabla^2 \psi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

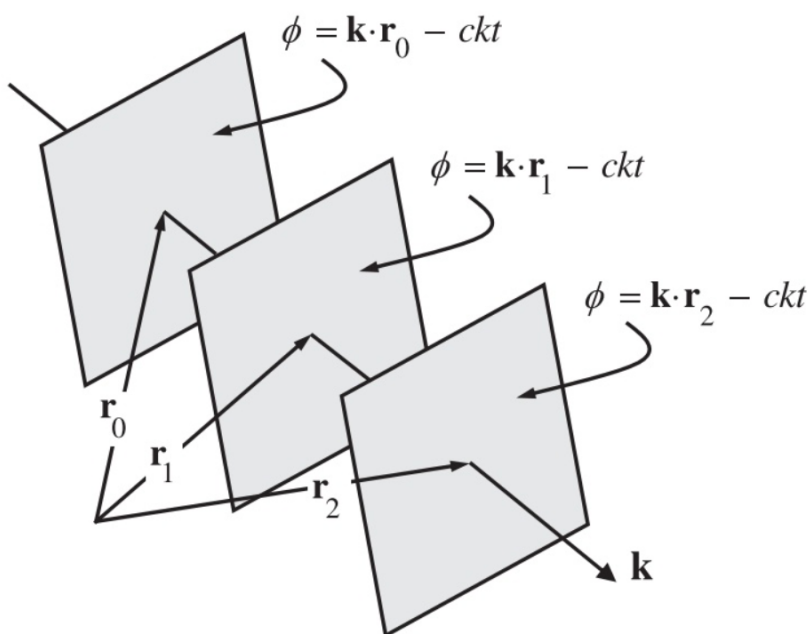
- Vamos a trabajar con **ondas planas**, ondas que por un cierto instante t tienen la misma fase en todos los puntos de un plano perpendicular a la dirección de propagación, y **monocromáticas**, de una sola frecuencia.

La solución a la ecuación de ondas (4), (5) es

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$\vec{E}_0 \in \mathbb{C}^3$ (Amplitudes)
 $\vec{B}_0 \in \mathbb{C}^3$ complejas
 $\pm \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \begin{cases} + : \text{onda} \rightarrow \\ - : \text{onda} \leftarrow \end{cases}$
 $\mp \vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t \begin{cases} - : \text{onda} \rightarrow \\ + : \text{onda} \leftarrow \end{cases}$



Donde $\vec{k} = k \hat{k}$ es el **vector de ondas** que se relaciona con la longitud de onda de la frente que sigue

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{número de ondas})$$

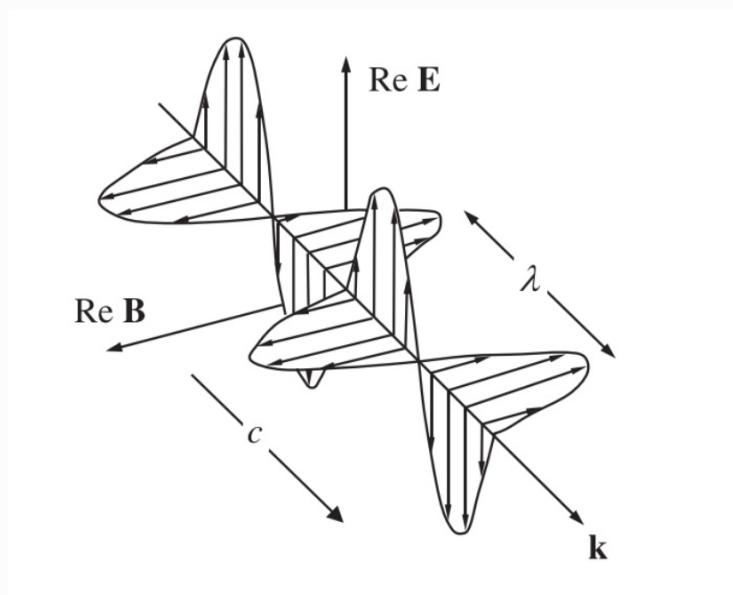
y tiene la dirección y sentido de propagación de la onda. Evidentemente dicho valor no es arbitrario y se haya relacionado con la **frecuencia angular** ω . Si introducimos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en la ecuación de ondas:

$$-\vec{E}_0 k^2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \epsilon \mu \omega^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{0}$$

→

$$k^2 = \epsilon \mu \omega^2$$

Relación entre el número de ondas y la frecuencia angular.



$$\text{Así, } v_{\text{prop}} = v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \equiv c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s es}$$

↑ en el vacío, μ_0, ϵ_0

la velocidad de propagación de la onda.

Evidentemente a la hora de obtener los campos físicos (no complejos) simplemente tomamos la parte real:

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}$$

$$\vec{B} = \text{Re} \left\{ \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}$$

Es muy habitual emplear la notación compleja trabajamos únicamente con $\vec{E}_0, \vec{B}_0 \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}}$, incorporando al final del problema la dependencia temporal. Es importante tener en cuenta primero, cuál es el convenio de signos que hemos asumido si el $-$ va con $\vec{k}\vec{r}$ o con ωt y segundo, que al derivar los campos simplemente tendremos que multiplicar la expresión por $i\omega$ ($0 - i\omega$).

• Relación espacial entre los campos.

Las funciones $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ soluciones de la ecuación de ondas deben verificar evidentemente las ecuaciones de Maxwell, algo que no está asegurado de por sí (existen soluciones de las ecuaciones de ondas que no verifican las ecuaciones de Maxwell). Impongamos entonces que las satisfagan:

$$i) \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$ii) \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

* Esto es, los ondas electromagnéticas planas son necesariamente ondas transversales (vibran perpendicularmente a la dirección de propagación)

$$iii) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) = -i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \sqrt{\mu\epsilon} (\hat{n} \times \vec{E}) \Rightarrow$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\hat{n} \times \vec{E}) = \frac{1}{Z} (\hat{n} \times \vec{E})$$

* Los campos, además de ser perpendiculares a la dirección de propagación son **perpendiculares entre sí**. La relación entre módulos es:

$$kE = \omega B$$

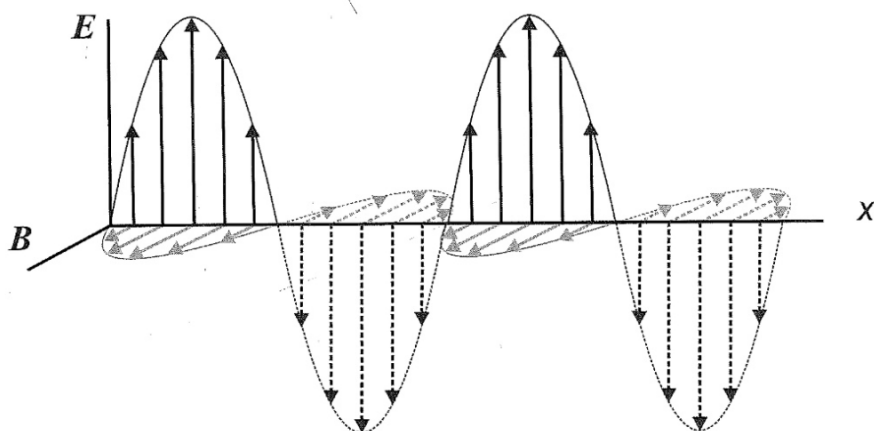
y,

$$E = \frac{\omega}{k} B = vB = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} B = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H$$

denominamos **impedancia del medio**⁽¹⁾ a $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ que relaciona

los módulos de los campos eléctricos y magnéticos. En el vacío:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$



Representación de una onda electromagnética plana propagándose a lo largo del eje x.

(1) **o impedancia de propagación**

- **Energía e impulso de una onda electromagnética**

La densidad de energía del campo electromagnético en medios l.h.i. es:

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

Pero hemos que visto que para ondas monocromáticas en medios l.h.i. con $\sigma=0$,

$$E = \frac{B}{\mu\epsilon} = c B$$

luego
$$u_{em} = \frac{B^2}{2\mu} + \frac{B^2}{2\epsilon} = \frac{B^2}{\mu} = \epsilon E^2$$

y la densidad de energía eléctrica es igual a la densidad de energía magnética.

Es sencillo demostrar que el promedio del vector de Poynting viene dado por.

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} [\operatorname{Re}[\vec{E}_0] \times \operatorname{Re}[\vec{H}_0] + \operatorname{Im}[\vec{E}_0] \times \operatorname{Im}[\vec{H}_0]]$$

o lo que es lo mismo:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

y de forma similar:

$$\langle u_e \rangle = \frac{1}{2} \epsilon \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{4} \epsilon (\vec{E} \cdot \vec{E}^*)$$

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{2} \mu \langle \vec{H}^2 \rangle = \frac{1}{4\mu} (\vec{B} \cdot \vec{B}^*)$$

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2$$

El vector de Poynting puede escribirse de la forma siguiente, empleando las relaciones especificadas entre los campos:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{E}^2}{2} \hat{k}$$

Por la interpretación asociada al vector de Poynting como flujo de energía por unidad de área, si una onda incide normalmente sobre una superficie S :

$$\frac{P}{A} = -\vec{S} \cdot \hat{n} = |\vec{E} \times \vec{H}| \cdot \frac{\vec{E}^2}{2}$$

Por otro lado, como $-\mathbf{T} \cdot \hat{n}$ se puede interpretar como el flujo por unidad de tiempo y de área de momento lineal.

$$\mathbf{T} \cdot \hat{n} = -\hat{n} \cdot \frac{1}{2} \left(\epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu} \right) = \hat{k} \epsilon E^2$$

La fuerza por unidad de área se suele conocer como presión de radiación.

• Polarización de los ondas

La dirección del campo eléctrico de una onda electromagnética en su evolución temporal se denomina polarización de la onda electromagnética.

Dado que $\vec{E} \perp \hat{k}$, $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2\}$ vectores l.i. tales que $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \hat{k}$ y

$$\vec{E} = \left[A e^{i\delta_1} \hat{n}_1 + B e^{i\delta_2} \hat{n}_2 \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- **Polarización elíptica:** En general el campo físico en el punto cambia de dirección con el tiempo, descrito como un elipse. Si:

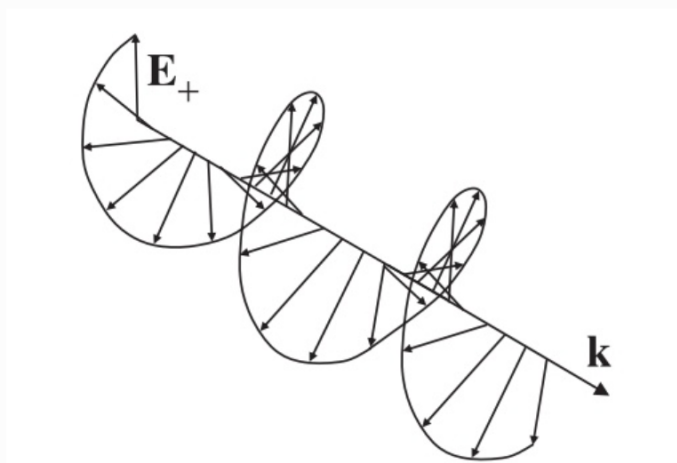
$$\vec{k} \cdot (\text{Re}[\vec{E}_0] \times \text{Im}[\vec{E}_0]) < 0 \quad \text{A derechas}$$

$$\vec{k} \cdot (\text{Re}[\vec{E}_0] \times \text{Im}[\vec{E}_0]) > 0 \quad \text{A izquierdas}$$

- **Polarización lineal:** En este caso $\text{Re}[\vec{E}_0] \parallel \text{Im}[\vec{E}_0]$. El campo eléctrico tiene la misma dirección en todo punto y momento.

- **Polarización circular:** Caso particular de la elíptica en la que $\|\vec{E}_0\| = \text{cte}$ pero \vec{E}_0 cambia de dirección, $|\text{Re}(\vec{E}_0)| = |\text{Im}(\vec{E}_0)|$ y $\text{Re}(\vec{E}_0) \cdot \text{Im}(\vec{E}_0) = 0$.

Al plano que contiene a \vec{k} y a \vec{E}_0 es el **plano de polarización**

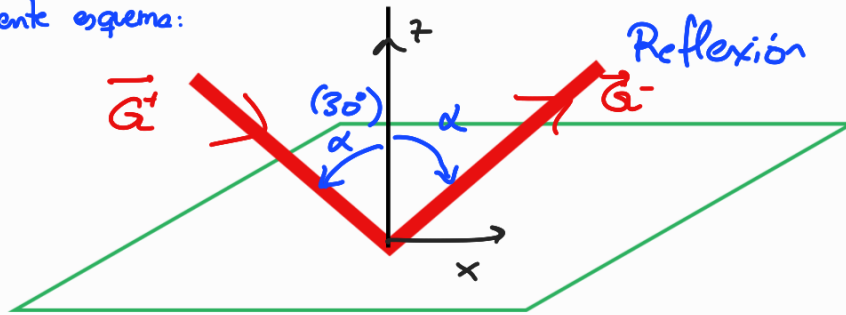


Onda con polarización circular

Ejemplo contión: Energía y momento en ondas electromagnéticas

* Un impulso láser de 1 kJ de energía incide con un ángulo de incidencia de 30° sobre una superficie perfectamente reflectante. ¿Cuál es el impulso mecánico en $\mu\text{N}\cdot\text{s}$ que se le comunica?

Planteamos el siguiente esquema:



La variación de momento electromagnético será: $\Delta \vec{G} = \vec{G}^+ - \vec{G}^-$ donde $\vec{G}^\pm = G \sin \alpha \hat{x} \mp G \cos \alpha \hat{z}$

y así, $\Delta \vec{G} = -2G \cos \alpha \hat{z} = -\sqrt{3}G \hat{z}$

Por otro lado consideramos un volumen de láser para obtener \vec{G}

$$\vec{G} = \int_V \vec{g} \, dV = \frac{1}{c^2} \int_V \vec{S} \, dV = \frac{1}{c^2} \hat{s} \int_V E^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \, dV = \frac{\epsilon}{c} \int_V E^2 \, dV = \frac{U_{em}}{c} \hat{s}$$

pues $|\vec{S}| = EH = E\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E$ admitiendo que el onda es plana. Así, $|\Delta \vec{G}| = +\frac{\sqrt{3}}{c} U_{em} = 5,77 \mu\text{N}\cdot\text{s}$

• Ondas transversales

Una forma alternativa del estudio que hemos realizado hasta ahora, presentado en los apuntes del Prof. Fonobdo consiste en partir únicamente de la hipótesis:

i) Espacio libre

ii) Velocidad constante y uniforme

iii) Propagación sin deformación

$$iv) \nabla_{\perp} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{eq. } \nabla \times \vec{E}_{\perp} = \vec{0})$$

$$\nabla_{\perp} \times \vec{B} = \vec{0}$$

y es posible demostrar que $\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{v} \times \vec{E}$

$$\vec{E} = -c \hat{n} \times \vec{B}$$

Las restricciones (iv) implican que las componentes de los campos transversales a la dirección de propagación son conservativas, lo que se cumple precisamente en el caso particular de las ondas planas.

3. Ondas planas en medios conductores

Empleando notación fasorial podemos escribir cada uno de los componentes de los campos como

$$\psi = \text{Re} [\psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)}] = \text{Re} [\psi(\vec{r}) e^{i\omega t}]$$

De esta forma la ecuación de ondas queda como:

$$\nabla^2 \psi + (-i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\varepsilon) \psi = 0$$

$$\nabla^2 \psi + (-i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\varepsilon) \psi = 0$$

Si definimos $k^2 \equiv \omega^2\mu\varepsilon - i\omega\mu\sigma \equiv (\beta - i\alpha)^2$

$\beta \equiv \omega^2\mu\varepsilon$ Cte de propagación

$\alpha \equiv \omega\mu\sigma$ Cte de atenuación

[factor de propagación complejo]²

Obtenemos así la denominada **ecuación de Helmholtz**:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi = 0$$

Válido para ondas monocromáticas.

Para medios no conductores $\sigma=0$ $k = \omega^2\mu\varepsilon$ y se recuperan todos los resultados ya vistos.

- la corriente de desplazamiento $\vec{J}_d = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon i \omega \vec{E}$ responde a la transformación de energía eléctrica en magnética.
- la corriente de conducción $\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$ está relacionada únicamente con la disipación de potencia (α)

El factor de calidad Q de un medio se puede interpretar como una medida de la eficiencia del medio para transmitir un campo eléctrico:

$$Q = \frac{|\vec{J}_d|}{|\vec{J}_f|} = \frac{\omega \epsilon}{\sigma}$$

Definiremos también la permitividad compleja como

$$\epsilon_c = \epsilon - \frac{\sigma}{\omega} i = \epsilon' - \epsilon'' i$$

De esta forma podremos escribir:

$$k = \sqrt{\epsilon \mu \omega^2 - \sigma^2 \mu \omega i} = \omega \sqrt{(1 - \frac{\sigma}{\omega} i) \epsilon \mu} = \omega \sqrt{(1 - i) \epsilon \mu}$$

Podemos expresar α, β en función del factor de calidad como

$$\alpha = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} - 1}{2}} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} + 1}{2}} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} + 1 \right)}$$

Se denominará **buen conductor** a aquellos medios conductores tales que

$$\sigma \gg \omega \epsilon$$

En esos casos:

$$\alpha = \beta \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

En este caso no interviene ϵ permitividad porque $T_d \ll T_f$ ($Q \ll 1$).

La solución a las ecuaciones de onda en medios conductores es.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\beta - i\alpha)\hat{k}\cdot\vec{r}} e^{i\omega t} = \vec{E}_0 e^{-\alpha\hat{k}\cdot\vec{r}} e^{i(-\beta\hat{k}\cdot\vec{r} + \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\alpha\hat{k}\cdot\vec{r}} e^{i(-\beta\hat{k}\cdot\vec{r} + \omega t)}$$

La solución es lo mismo que en un medio no conductor (notarse que β juega el papel de $|\vec{k}|$ en un medio no conductor) pero con una atenuación dada por la exponencial $e^{-\beta(\hat{k}\cdot\vec{r})}$.

En estos medios se suele definir la **profundidad de penetración** δ como lo inverso de la constante de amortiguación:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad \uparrow \quad \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

Buen conductor

la velocidad será:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}\right)^2} + \frac{1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}} < v_{\text{no conductor}}$$

• Relación entre los campos

Empleando la notación compleja de los campos y considerando \vec{k} complejo se puede obtener que

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

pues no influye en ello que \vec{k} no sea real. No obstante, por el caso de la ley de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\beta - i\alpha}{\omega} \hat{k} \times \vec{E}$$

* Es decir, en medios conductores (dispersivos) los campos eléctrico y magnético se encuentran siempre desfasados.

Para el caso de un buen conductor $\beta = \alpha$

$$\vec{B} = (1 - i) \frac{\beta}{\omega} \hat{k} \times \vec{E} = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\beta}{\omega} \hat{k} \times \vec{E}$$

y el campo eléctrico y el magnético presentan un desfase de $\frac{\pi}{4}$ radianes

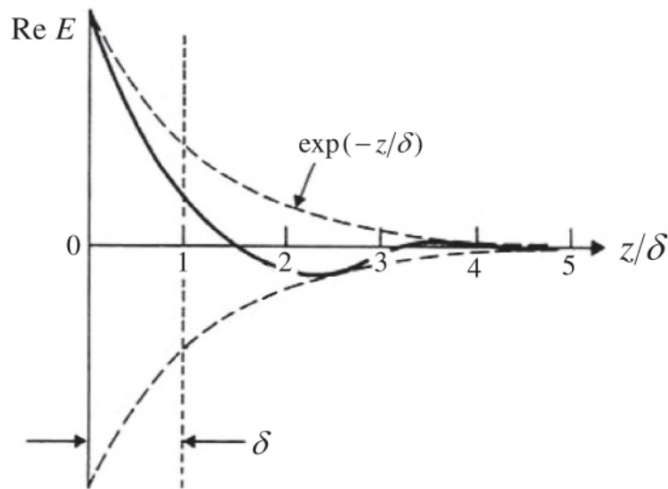


Figure 17.13: The physical electric field propagating into a sample of high conductivity matter confined to $z > 0$. The field outside the sample is not shown.

- Definiremos la impedancia de propagación (complejo) para este tipo de medios como:

$$Z = \frac{\omega\mu}{\beta - i\alpha}$$

Que para buenos conductores resulta

$$Z \approx \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} (1+i) = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

↑
Desfase entre los
comps.

4. Ondas planas en medios lineales dispersivos

Medio dispersivo: Medio lineal en el que las propiedades intrínsecas que afectan a la propagación dependen de la frecuencia.

La relación de dispersión es la relación entre la frecuencia angular y el número de onda:

$$\omega = \omega(k) \quad k = k(\omega)$$

Por extensión, cualquier propiedad P tal que $P = P(\omega)$ es en sí una relación de dispersión.

En un medio lineal no dispersivo la relación de dispersión será

$$\omega(k) = k v$$

En medios dispersivos conviene definir la velocidad de grupo

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk}$$

En medios dispersivos $k \in \mathbb{C}$

$$k = \beta - i\alpha$$

Los pérdidas pueden caracterizarse con

Dieléctricos: $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 (\epsilon' - i\epsilon'')}$

Magnéticos: $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega \sqrt{(\mu' - i\mu'') \epsilon}$

5. Ondas planas en medios semiinfinitos

Quando una onda electromagnética atraviesa una superficie de separación entre dos medios S en general $\vec{E}|_S, \vec{H}|_S$ no verifican las condiciones de frontera. Es necesario por ello considerar en el medio de incidencia una onda incidente y una reflejada y en el otro, una onda transmitida.

Consideremos el caso más simple, que es la incidencia normal. El superíndice +/- indica onda incidente/reflejada, lo primo indica transmitida. Por ser incidencia normal $\vec{E}, \vec{H}|_S \parallel \text{Sup}$.

$$\vec{H}^{\pm} = \frac{1}{Z_i} (\hat{n}^{\pm} \times \vec{E}^{\pm}) \quad \hat{n}^{\pm} = \pm \hat{n}$$

- El campo eléctrico tangencial debe de ser continuo

$$\rightarrow \vec{E}^+ + \vec{E}^- = \vec{E}'$$

- Si $\vec{K}|_S = \vec{0}$ \vec{H} también debe de ser continuo

$$\begin{cases} \vec{H}^+ + \vec{H}^- = \frac{1}{Z_i} (\hat{n}^+ \times \vec{E}^+ + \hat{n}^- \times \vec{E}^-) = \frac{1}{Z_i} \hat{n} (\vec{E}^+ + \vec{E}^-) \\ \vec{H}' = \frac{1}{Z_t} \hat{n} \times \vec{E}' \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{z_1} \hat{n} \times (\vec{E}^+ + \vec{E}^-) = \frac{1}{z_2} \hat{n} \times \vec{E}'$$

Sin más que operar llegamos a los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión

$$r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \quad t = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}$$

(incidence normal)

$$t = 1 + r$$

Así,

$$\begin{aligned} \vec{E}^- &= r \vec{E}^+ \\ \vec{E}' &= t \vec{E}^+ \end{aligned}$$

Definiremos además los coeficientes de reflexión/transmisión de potencia R, T como los cocientes de los módulos de los vectores de Poynting

$$\vec{S}_i^\pm = \pm \frac{1}{z_i} (\vec{E}^\pm)^2 \hat{n}$$

$$R = \left| \frac{S^-}{S^+} \right|^2 = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \right)^2 = \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \right|^2$$

mnemotécnicas

$$T = \left| \frac{S'}{S^+} \right|^2 = \frac{4z_1 z_2}{(z_2 + z_1)^2} = \frac{4 \operatorname{Re}(z_1 z_2^*)}{|z_2 + z_1|^2}$$

• Impedancia superficial

Considerando un material conductor fino. En estos casos conviene trabajar con una corriente superficial dada por

$$\vec{K} = \int_0^{\infty} \vec{J}_f dz = \sigma \vec{E}_t |_{z=0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} dz$$
$$= \frac{\sigma}{\beta + i\alpha} \vec{E}_t |_{z=0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{buena conductor}}}{=} \frac{1-i}{2} \sigma \delta \vec{E}_t |_{z=0}$$

Donde hemos supuesto que el onda se propaga en sentido y dirección de z^+ . Así si definimos la **impedancia superficial** como

$$Z_s \equiv \frac{\sigma}{\beta + i\alpha} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{bc}}}{=} (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$$

Podemos establecer la siguiente relación entre el campo en la superficie y la corriente superficial

$$\vec{E}_t |_{z=0} = Z_s \vec{K}$$

Ejemplo: Impedancias en un medio dispersivo ($\epsilon_j \neq \epsilon_0$)

7. Un medio dispersivo tén unha constante de propagación $k = \beta - i\alpha$.
- Obtéñanse as impedancias de propagación Z e superficial Z_s .
 - Estúdiase o caso particular dun bo conductor.
 - Neste caso, exprésese a impedancia superficial en función da fondura de penetración.

(a) En un medio dispersivo a constante de propagación k es un número complejo $k = \beta - i\alpha$. Suponemos, sin pérdida de generalidad que a dirección de propagación de lo onda es \hat{z} , $\vec{k} = k\hat{z}$ y así,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{-ikz} e^{i\omega t}$$

Como ya hemos visto en teoría:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -ik(\hat{z} \times \vec{E}) = i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{H} = \frac{k}{\mu\omega} (\hat{z} \times \vec{E})$$

La impedancia de propagación se define como $Z = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\beta - i\alpha}$

Por otro lado, obtenemos la impedancia superficial a partir de:

$$\vec{K} = \int_0^{\infty} \vec{J} dz = \sigma \int_0^{\infty} \vec{E}|_z e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} dz = \frac{\sigma}{\alpha + i\beta} \vec{E}|_z = \frac{\vec{E}|_z}{Z_s}$$

esto es $Z_s = \frac{\alpha + i\beta}{\sigma}$

(b) Si trabajamos con un buen conductor $\sigma \gg \omega\epsilon$ y $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

Sustituyendo en los resultados anteriores:

$$Z = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\omega\mu\sigma} \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \sqrt{\frac{2\omega\mu}{\sigma}} \frac{(1+i)}{2} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1+i)$$

$$Z_s = \frac{\alpha}{\sigma} + i \frac{\beta}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} (1+i) = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1+i) = Z$$

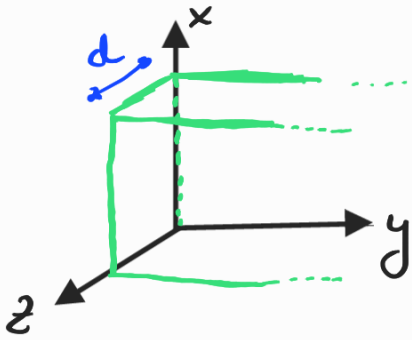
Así, en un buen conductor $Z = Z_s$.

(c) Como $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$ tenemos que

$$\left. \begin{aligned} \delta = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \\ \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \end{aligned} \right\} Z = Z_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1+i) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\sigma}{\omega \mu}}} (1+i) =$$
$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}} (1+i) = \frac{1}{\sigma \delta} (1+i)$$

Ejemplo: Propagación de ondas en conductores (Ej 8 B vol 2)

8. Nunha das caras dunha lámina metálica plana aplícase un campo alterno, con \vec{E} e \vec{B} paralelos á superficie.
- Obtéñase o campo na outra cara, en función da frecuencia.
 - ¿Canto vale a atenuación na primeira frecuencia en que os campos nas dúas caras están en oposición de fase?



Planteamos el campo eléctrico de la forma siguiente:

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}^+ e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}}_{\vec{E}_1} + \underbrace{\vec{E}^- e^{\alpha z} e^{i\beta z}}_{\vec{E}_2} \quad (8.1)$$

Esto es, como una onda reflejada y otra incidente. Admitiendo que trabajamos con

un buen conductor $Z = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}$ y $\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$

la impedancia por un buen conductor es $Z \ll 1$. Mientras, en el

vacío $Z_0 \approx 377 \Omega$ luego el coeficiente de ~~transmisión~~ reflexión

resulta:

$$r|_d = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_0 + Z} = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z} \approx 1 \quad (8.2)$$

$$\text{así, } \vec{E}_2|_d = r \vec{E}_1|_d \Rightarrow \vec{E}_2|_d \approx \vec{E}_1|_d \Rightarrow$$

$$E^- e^{\alpha d} e^{i\beta d} = E^+ e^{-\alpha d} e^{-i\beta d}$$

$$E^- = E^+ e^{-2\alpha d} e^{-2i\beta d} \quad (8.3)$$

Por otro lado, en $z=0$, $|\vec{E}(z=0)| = E^+ + E^- \stackrel{(8.3)}{=} E^+ (1 + e^{-2\alpha d} e^{-2i\beta d})$
 $\stackrel{||}{=} E_0$

Resultado:

$$\mathcal{E}^+ = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + e^{-2\alpha d} e^{-2i\beta d}} \quad (8.4)$$

En la cara d el campo eléctrico será entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}|_d &= \mathcal{E}^+ e^{-\alpha d} e^{-i\beta d} + \mathcal{E}^- e^{\alpha d} e^{i\beta d} = \mathcal{E}_0 \frac{e^{-\alpha d} e^{-i\beta d}}{1 + e^{-2\alpha d} e^{-2i\beta d}} + \\ &+ \mathcal{E}_0 \frac{e^{\alpha d} e^{i\beta d} e^{-2\alpha d} e^{-2i\beta d}}{1 + e^{-2\alpha d} e^{-2i\beta d}} = \mathcal{E}_0 \frac{e^{-\alpha d} e^{-i\beta d} + e^{-\alpha d} e^{-i\beta d}}{1 + e^{-2\alpha d} e^{-2i\beta d}} = \\ &= \mathcal{E}_0 \frac{2}{e^{\alpha d} e^{i\beta d} + e^{-\alpha d} e^{-i\beta d}} \end{aligned}$$

Podemos simplificar esta expresión si consideramos:

$$\begin{aligned} &(e^{\alpha d} e^{i\beta d} + e^{-\alpha d} e^{-i\beta d}) \\ &= \frac{1}{2} \left[(e^{\alpha d} + e^{-\alpha d}) (e^{i\beta d} + e^{-i\beta d}) + (e^{\alpha d} - e^{-\alpha d}) (e^{i\beta d} - e^{-i\beta d}) \right] = \\ &= 2(\cosh \alpha d \cos \beta d + i \sinh \alpha d \sin \beta d) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\mathcal{E}|_{z=d} = \frac{\mathcal{E}_0}{(\cosh \alpha d \cos \beta d + i \sinh \alpha d \sin \beta d)} \quad (8.5)$$

(b)

Disponemos de la ecuación (8.5) para relacionar los campos en ambos

casos

$$E|_{z=d} = \frac{E_0}{(\cosh \alpha d \cos \beta d + i \sinh \alpha d \sin \beta d)}$$

Si $\beta d = \pi$ y $\alpha \approx \pi$

$$E|_d = -\frac{E_0}{\cosh d}$$

y ya quedan en oposición de fase.

6. Ondas esféricas

Una onda esférica es una solución a las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre que representa a los ondas propagándose radialmente.

El objetivo fundamental de este tema es obtener un conjunto de soluciones de la ecuación de ondas en coordenadas esféricas (multipolos) para expresar el campo electromagnético como combinación lineal única de estas soluciones.

A la hora de resolver la ecuación hay dos relaciones vectoriales que serán de utilidad:

$$i) \nabla \times (\vec{r} \times \vec{\Phi}) + \nabla(\vec{r} \cdot \vec{\Phi}) = \vec{r}(\nabla \cdot \vec{\Phi}) - \vec{\Phi} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{\Phi})$$

$$ii) \nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\Phi}) = 2(\nabla \cdot \vec{\Phi}) + \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{\Phi}$$

donde $\vec{\Phi}$ es un campo vectorial arbitrario.

Demostremos entonces estas identidades.

Ejemplos $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$

$$\nabla (\vec{C} \cdot \vec{D}) = \vec{D} \times (\nabla \times \vec{C}) + \vec{C} \times (\nabla \times \vec{D}) + (\vec{D} \cdot \nabla) \vec{C} + (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{D}$$

Entonces:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\Phi}) = \vec{r} (\nabla \cdot \vec{\Phi}) - \vec{\Phi} (\nabla \cdot \vec{r}) + \underbrace{(\vec{\Phi} \cdot \nabla) \vec{r}}_{\vec{\Phi}} - \underbrace{(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{\Phi}}_3$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{\Phi}) = (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{\Phi} + \underbrace{(\vec{\Phi} \cdot \nabla) \vec{r}}_{\vec{\Phi}} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{\Phi}) + \underbrace{\vec{\Phi} \times (\nabla \times \vec{r})}_{\vec{0}}$$

Sumando ambas expresiones:

$$\nabla \times (\vec{r} \times \vec{\Phi}) + \nabla (\vec{r} \cdot \vec{\Phi}) = \vec{r} (\nabla \cdot \vec{\Phi}) - \vec{\Phi} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{\Phi})$$

que es la expresión (i). Si ahora tomamos la divergencia de esta expresión:

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times (\vec{r} \times \vec{\Phi}))}_{=\vec{0}} + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla (\vec{r} \cdot \vec{\Phi}))}_{\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\Phi})} = \underbrace{\nabla \cdot [\vec{r} (\nabla \cdot \vec{\Phi})]}_{\text{Usaremos identidad } \nabla \cdot (u \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla u + u (\nabla \cdot \vec{A})}$$

$$- \nabla \cdot \vec{\Phi} + \nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{\Phi})];$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\Phi}) = \underbrace{(\nabla \cdot \vec{r})}_3 (\nabla \cdot \vec{\Phi}) + \vec{r} \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{\Phi})$$

$$- \nabla \cdot \vec{\Phi} + (\nabla \times \vec{\Phi}) \cdot \underbrace{(\nabla \times \vec{r})}_{\vec{0}} - \vec{r} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \vec{\Phi}))$$

Así,

$$\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\Phi}) = 3 \nabla \cdot \vec{\Phi} + \vec{r} \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{\Phi}) - \nabla \cdot \vec{\Phi} \\ - \vec{r} \cdot (\nabla(\nabla \cdot \vec{\Phi}) - \nabla^2 \vec{\Phi})$$

$$\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\Phi}) = 2 \nabla \cdot \vec{\Phi} + \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{\Phi}$$

Que es la relación (ii) que buscábamos.

Demostremos ahora esta proposición, que no será útil próximamente:

* **Proposición**: Sea ψ una función que verifique ecuación de ondas escalar. Entonces $\vec{F} = \vec{r} \times \nabla \psi$ cumple la ecuación de ondas vectorial.

Demostación

Partimos de:

$$\nabla \times (\vec{r} \times \vec{\Phi}) + \nabla(\vec{r} \cdot \vec{\Phi}) = (\nabla \cdot \vec{\Phi}) \vec{r} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{\Phi}) - \vec{0}$$

Sustituyendo $\vec{\Phi} = \nabla \psi$ y calculando el rotacional de ambos miembros:

$$\nabla \times (\nabla \times (\vec{r} \times \nabla \psi)) + \nabla \times (\nabla (\vec{r} \cdot \nabla \psi)) =$$

$$\nabla \times ((\nabla \cdot \nabla \psi) \vec{r}) + \nabla \times (\vec{r} \times (\nabla \times \nabla \psi)) - \nabla \times (\nabla \psi)$$

$$\nabla^2 \psi = + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Como $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$:

$$\nabla [\nabla \cdot (\vec{r} \times \nabla \psi)] - \nabla^2 (\vec{r} \times \nabla \psi) = \nabla \times \left[\left(+ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \vec{r} \right] =$$

$$= + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times (\psi \vec{r}) = + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \psi \times \vec{r} + \psi (\nabla \times \vec{r})) =$$

$$= - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{r} \times \nabla \psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}$$

Como $\nabla \cdot (\vec{r} \times \nabla \psi) = \nabla \psi \cdot (\nabla \times \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\nabla \times \nabla \psi)$

$$= \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{q.e.d.}$$

• Potenciales de Debye

Si \vec{F} es $\vec{F} = \vec{r} \times \nabla \psi$ donde ψ verifica la ecuación de ondas y hemos visto que \vec{F} verifica la ecuación de ondas vectorial. Por otro lado si definimos una función vectorial \vec{G} como $\vec{G} /$

$$\vec{G} = \nabla \times \vec{F}$$

dicho campo será también solución de la ecuación de ondas. Teniendo en cuenta la relación presentada antes demostraremos que $(\vec{r} \cdot \vec{G})$ verifica la ec. de ondas si \vec{G} lo hace.

$$\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{G}) = 2 \nabla \cdot \vec{G} + \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{G} = 2 \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) + \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{G}$$

$$\nabla^2 \vec{G} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial t^2} \xrightarrow{\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{G})} \downarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{r} \cdot \vec{G}) = 0$$

(por hipótesis)

$$\vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{G} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{r} \cdot \vec{G}) = 0$$

$$\vec{r} \cdot \left(\nabla^2 \vec{G} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial t^2} \right) = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \vec{0}}$

Así, $\psi = \vec{r} \cdot \vec{G}$ conocido como **potencial de Debye** verifica también la ecuación de ondas.

Por las características de las funciones \vec{F}, \vec{G} podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{F} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{G} = 0 \\ \nabla \times \vec{F} = -\vec{G} \\ \nabla \times \vec{G} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} \end{cases}$$

En función de si designamos $\vec{G} = \vec{E}$ o $\vec{G} = \vec{H}$ hableremos (próximamente) de **multipolos eléctricos** o **magnéticos**.

7. Solución a la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas.

En esta sección nos restringiremos el estudio de ondas monocromáticas. De esta forma el problema se reduce a resolver la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(r, \theta, \phi) = 0$$

Emplearemos el método de separación de variables, suponiendo una solución de la forma:

$$\Psi_e(r, \theta, \phi) = R_e(r) \Theta_e(\theta) \Phi_e(\phi)$$

Tomando la expresión del Laplaciano en esféricas:

$$\begin{aligned} r^2(\nabla^2 \Psi_e + k^2 \Psi_e) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_e}{\partial r} \right) \Theta \Phi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta_e}{\partial \theta} \right) R \Phi + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \phi^2} R \Theta \\ &+ k^2 r^2 \Psi = 0 \end{aligned}$$

Dividiremos entre Φ y agrupamos:

$$\frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_e}{\partial r} \right) + k^2 r^2 = - \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

La relación debe de ser válida $\forall (r, \theta, \varphi)$ en Ω que ambas expresiones serán iguales a una cte = $l(l+1)$

• Parte radial

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR_e}{dr} \right] + \left[k^2 r^2 - l(l+1) \right] R_e = 0$$

Podemos emplear el truco de hacer $R_e(r) = \frac{z(r)}{r}$

y así,

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} + \left[k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right] z = 0$$

Esta ecuación diferencial es la ecuación de Bessel:

$$r^2 \frac{d^2 z}{dr^2} + r \frac{dz}{dr} + [(kr)^2 - (l + \frac{1}{2})^2] z = 0$$

Cuya solución son las funciones de Bessel de primera especie $J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ y las funciones de Bessel de segunda especie (o de Neumann)

$N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$:

$$J_{l+\frac{1}{2}}(kr) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(kr/2)^{2n + (l+\frac{1}{2})}}{n! (l+n+\frac{1}{2})!}$$

$$N_{l+\frac{1}{2}}(kr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \cos((l+\frac{1}{2})\pi) - J_{-l-\frac{1}{2}}(kr)}{\sin[(l+\frac{1}{2})\pi]}$$

No obstante, en el caso que estamos estudiando resulta más útil emplear las funciones esféricas de Bessel y Neumann

$$j_e(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{\ell+1/2}(kr)$$

$$n_e(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} N_{\ell+1/2}(kr)$$

Estas funciones están tabuladas y pueden consultarse en Internet.

Las funciones de Neumann divergen si $r \rightarrow 0$. Empleemos por evitar este problema las **funciones esféricas de Hankel**

$$h_e^{(1)} = j_e + in_e \quad (\text{Primera especie, onda hacia el interior})$$

$$h_e^{(2)} = j_e - in_e \quad (\text{Segunda especie, onda hacia el exterior}).$$

Incluyo al final de este tema un resumen de estas funciones.

• Parte angular

$$\frac{\sin \theta}{\Theta_l} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta_l}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\sin^2 \theta \ell(\ell+1)$$

$$\frac{\sin \theta}{\Theta_l} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta_l}{\partial \theta} \right) + \ell(\ell+1) \sin^2 \theta = - \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

\parallel m^2 \parallel m^2

↳ Función $\Phi(\varphi)$: $\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi_m = 0$

Por que sea univaleado y continue $m \in \mathbb{Z}$ y:

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$$

↳ Función $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta_m}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_m = 0$$

Que es la ecuación de Legendre.

Las soluciones serán las funciones asociadas de Legendre $P_m(\cos\theta)$

$$P_m(\cos\theta) = (-1)^m (1 - \cos^2\theta)^{m/2} \frac{d^m}{d\cos\theta} P_l(\cos\theta)$$

En general las soluciones de la parte angular se denotan por Y_{lm} y se conocen por armónicos esféricos, cuyo formato normalizado es:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*$$

* Solución general

La solución general de la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas es:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_l j_l(kr) + b_l n_l(kr)] Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

8. Multipolos

Recordemos que si ψ es un campo escalar que verifica la ecuación de ondas escalar entonces

$$\vec{F} = \vec{r} \times \nabla \psi$$

satisfiere la ecuación de ondas vectorial.

Si ψ_{lm} es uno de los soluciones obtenidos anteriormente por la ecuación de Helmholtz. Podemos expresar \vec{F} como:

$$\vec{F}_{lm} = \vec{r} \times \nabla \psi_{lm} = \text{Re} \vec{r} \times \nabla \gamma_{lm}$$

$$\hat{r} \times \nabla (\text{Re} \gamma_{lm}) = \hat{r} \times \frac{\partial (\text{Re} \gamma_{lm})}{\partial r} \hat{r} + \dots = \hat{r} \times \left(\text{Re} \left(\frac{\nabla \gamma_{lm}}{r} \right) \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

y por otro lado:

$$\vec{G}_{lm} = \nabla \times \vec{F}_{lm} = \nabla \times (\text{Re} \vec{r} \times \nabla \gamma_{lm}) =$$

$$\nabla \times (u \vec{A}) = \underbrace{\nabla u \times \vec{A}}_{(*)} + \underbrace{u (\nabla \times \vec{A})}_{(**)}$$

Resolvemos término a término:

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \nabla \times (\vec{r} \times \nabla \gamma_{lm}) &= \vec{r} (\nabla \cdot \nabla \gamma_{lm}) - \nabla \gamma_{lm} + \vec{r} \times (\nabla \times \nabla \gamma_{lm}) - \nabla (\vec{r} \cdot \nabla \gamma_{lm}) \\
 &\quad \nabla \times (\vec{r} \times \vec{\Phi}) + \nabla (\vec{r} \cdot \vec{\Phi}) = \vec{r} (\nabla \cdot \vec{\Phi}) - \vec{\Phi} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{\Phi}) \\
 &= \vec{r} \nabla^2 \gamma_{lm} - \nabla \gamma_{lm}
 \end{aligned}$$

donde $\vec{r} \cdot \nabla \gamma_{lm} = 0$ porque γ_{lm} solo tiene componentes perpendiculares.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\begin{aligned}
 (**) \quad (\nabla R_e) \times (\vec{r} \times \nabla \gamma_{lm}) &= \vec{r} (\nabla R_e \cdot \nabla \gamma_{lm}) \\
 &\quad - \nabla \gamma_{lm} (\nabla R_e \cdot \vec{r}) = \\
 &= -\nabla \gamma_{lm} (\vec{r} \cdot \nabla R_e)
 \end{aligned}$$

Resultado así que

$$\vec{E}_{lm} = R_e \left[\vec{r} \nabla^2 \gamma_{lm} - \nabla \gamma_{lm} \right] - (\vec{r} \cdot \nabla R_e) \nabla \gamma_{lm}$$

Por las características de $\gamma_{lm}(\theta, \phi)$ se puede demostrar que:

$$\nabla^2 \gamma_{lm} = -\frac{l(l+1)}{r^2} \gamma_{lm}$$

y así:

$$\begin{aligned}
\vec{G}_{lm} &= \nabla \times (\vec{r} \times \nabla \psi_{lm}) = \text{Re} \left[-\frac{\hat{r}}{r} \ell(\ell+1) \psi_{lm} \right. \\
&- \left. \nabla \psi_{lm} \right] - (\vec{r} \cdot \nabla \text{Re}) \nabla \psi_{lm} = -\frac{r}{\hat{r}} \ell(\ell+1) \text{Re} \psi_{lm} \\
&- \left[R_l \nabla \psi_{lm} + (\vec{r} \cdot \nabla \text{Re}) \nabla \psi_{lm} \right] = \\
&= -\frac{r}{\hat{r}} \ell(\ell+1) \psi_{lm} - \left[\text{Re} + r \cdot \frac{d\text{Re}}{dr} \right] \nabla \psi_{lm} = \\
&= -\frac{r}{\hat{r}} \ell(\ell+1) \psi_{lm} - \frac{d}{dr} (r \text{Re}) \nabla \psi_{lm}
\end{aligned}$$

De esto forma:

$$\vec{G}_{lm} = \nabla \times \vec{F}_{lm} = -\frac{\hat{r}}{r} \ell(\ell+1) \psi_{lm} - \frac{d}{dr} (r \text{Re}) \nabla \psi_{lm}$$

Nótese que el primer término solo tiene componente radial, y el segundo, solo angular. Por ello:

$$\vec{r} \cdot \vec{G}_{lm} = -\ell(\ell+1) \psi_{lm}$$

Podemos identificar $\vec{r} \cdot \vec{E}$, $\vec{r} \cdot \vec{H}$ con un potencial de Debye $\Psi_{lm}(r, \theta, \varphi) = R_e(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ y definir el tipo de multipolo según las condiciones impuestas al campo:

(a) Campos de tipo eléctrico $\vec{E}^{(E)} \propto \vec{G}^*$; $\vec{H}^{(E)} \propto \vec{F}^*$

$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{E}_{em}^{(E)} = -\frac{z_0}{\kappa} l(l+1) R_e^* Y_{lm}^* \\ \vec{r} \cdot \vec{H}_{em}^{(E)} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_{em}^{(E)} = \frac{z_0}{\kappa} \vec{G}_{em}^* = -\frac{z_0}{\kappa r} \left[\hat{r} l(l+1) R_e^* Y_{lm}^* + \frac{d}{dr} (r R_e^*) r \nabla Y_{lm}^* \right]$$

$$\vec{H}_{em}^{(E)} = i R_e^* \vec{r} \times \nabla Y_{lm}^*$$

(b) Campo de tipo magnético $\vec{E}^{(m)} \propto \vec{F}^*$
 $\vec{H}^{(m)} \propto \vec{G}^*$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{E}_{em}^{(m)} = 0 \\ \vec{r} \cdot \vec{H}_{em}^{(m)} = \frac{1}{\kappa} l(l+1) R_e^* Y_{em}^* \end{cases}$$

$$\vec{E}_{em}^{(m)} = i Z_0 \vec{F}_{em}^* = i Z_0 R_e^* \vec{r} \times \nabla Y_{em}^*$$

$$\vec{H}_{em}^{(m)} = - \frac{\vec{G}_{in}^*}{\kappa} = \frac{1}{\kappa r} \left[\hat{r} (l+1) l R_e^* Y_{em}^* \frac{d}{dr} (r R_e l) - \nabla Y_{in}^* \right]$$

• Desarrollo multipolar del campo electromagnético

La relación de completitud de los armónicos esféricos asegura que podemos descomponer cualquier función angular en una combinación lineal de armónicos esféricos. Así (operando previamente) podemos demostrar que:

$$\vec{E} = \sum_{l,m} A_{lm}^{(E)} \vec{E}_{lm}^{(E)} + B_{lm}^{(E)} \vec{E}_{lm}^{(M)}$$

$$\vec{H} = \sum_{l,m} A_{lm}^{(H)} \vec{H}_{lm}^{(E)} + B_{lm}^{(H)} \vec{H}_{lm}^{(M)}$$

siendo

$$A_{l,m}^{(E)} = - \frac{\kappa}{R_e^2 z_0 l(l+1)} \int_S Y_{lm}(\vec{r} \cdot \vec{E}) d\Omega$$

$$A_{l,m}^{(H)} = \frac{\kappa}{R_e^2 l(l+1)} \int_S Y_{lm}(\vec{r} \cdot \vec{H}) d\Omega$$

aquí lo clave está en que, dado un cierto campo \vec{E} o \vec{H} si...

- $\vec{r} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow A_{lm}^{(E)} = 0$ y el campo será multipolo magnético puro
- $\vec{r} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow A_{lm}^{(H)} = 0$ y el campo será multipolo eléctrico puro.

Ejemplos cuestiones ondas esféricas

* Si $\vec{n} \times \vec{E} = E_0 \frac{e^{-ikr}}{(kr)^2} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) \cos\theta$, el campo electromagnético...

- a) Es multipolo eléctrico puro b) Puede tener parte multipolo magnética
 c) Es multipolo magnético puro d) No puede existir

Lo que se nos está preguntando esencialmente es qué ocurre con los coeficientes $A_{em}^{(E)}$, $A_{em}^{(M)}$ en el desarrollo multipolar de los campos. Volviendo a la teoría de esta sección:

$$A_{em}^{(E)} = -\frac{k}{\epsilon_0 R_c^2 \ell(\ell+1)} \int Y_{\ell m} \vec{n} \cdot \vec{E} d\Omega \quad \Rightarrow \quad \text{si } \vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow A_{em}^{(E)} = 0 \quad \text{Campo multipolo magnético puro}$$

$$A_{em}^{(M)} = \frac{k}{R_c^2 \ell(\ell+1)} \int Y_{\ell m} \vec{n} \cdot \vec{H} d\Omega \quad \Rightarrow \quad \text{si } \vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow A_{em}^{(M)} = 0 \quad \text{Campo multipolo eléctrico puro}$$

El enunciado nos dice que $\vec{n} \cdot \vec{E} \neq 0$ lo que no es ninguno de las condiciones anteriores. Además, por la teoría sabemos que $\vec{n} \cdot \vec{E}_{em}^{(M)} = 0$ (esto es fácil de ver porque $\vec{E} \sim \vec{n} \times \nabla_{em} \perp \vec{n}$ y entonces

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = \vec{n} \cdot \left\{ \sum_{l,m} A_{lm}^{(E)} \vec{E}_{lm}^{(E)} + \sum_{l,m} A_{lm}^{(M)} \vec{E}_{lm}^{(M)} \right\} = \sum_{l,m} A_{lm}^{(E)} \vec{n} \cdot \vec{E}_{lm}^{(E)}$$

Con lo que nada sabemos de los coeficientes $A_{em}^{(M)}$, por lo tanto el campo PUEDE tener parte multipolo magnético.

* El campo magnético $\vec{B} = B_0 \frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) (\hat{\theta} \sin\theta + \hat{\phi} \cos\theta \cos\phi)$ es de tipo

- (a) Multipolo eléctrico (b) Multipolo magnético (c) Tiene partes eléctricas y magnéticas
 (d) No puede existir

Dal y como ya hemos mencionado anteriormente, para saber el tipo de campo debemos ver que coeficientes se anulan calculando $\vec{n} \cdot \vec{E}$ y $\vec{n} \cdot \vec{H}$ (pero admitiendo medio 1h: $\vec{B} = \mu \vec{H}$ y la situación sería análogo. En este caso,

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = B_0 \frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) (0 + 0) = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow A_{em}^{(M)} = 0 \Rightarrow \text{Campo multipolo eléctrico}$$

9. Funciones relevantes

• Polinomios de Legendre

Fórmula de Rodrigues $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l]$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Propiedades interesantes: $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

• Funciones asociadas de Legendre

Para $l, m \geq 0$ $P_{lm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} [P_l(x)]$

$$P_{l,-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(x)$$

Note: $|m| \leq l$.

Propiedades interesantes: $\int_{-1}^1 P_{lm} P_{ln} dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{ln} \quad 0 \leq n \leq l$

$$P_{00}(x) = 1, P_{10}(x) = x, P_{11}(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

• Armónicos esféricos

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_{lm}(\cos\theta) e^{im\phi}$$

$$Y_{00} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad Y_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta, \quad Y_{11} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$$

• Propiedades interesantes

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm} Y_{l'm'} d\Omega = \frac{4\pi}{(2l+1)} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

• Funciones de Bessel

F. Bessel de primera especie

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

F. Bessel de segunda especie

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

F. esférica de Bessel

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin(x)}{x}$$

F. esférica de Neumann

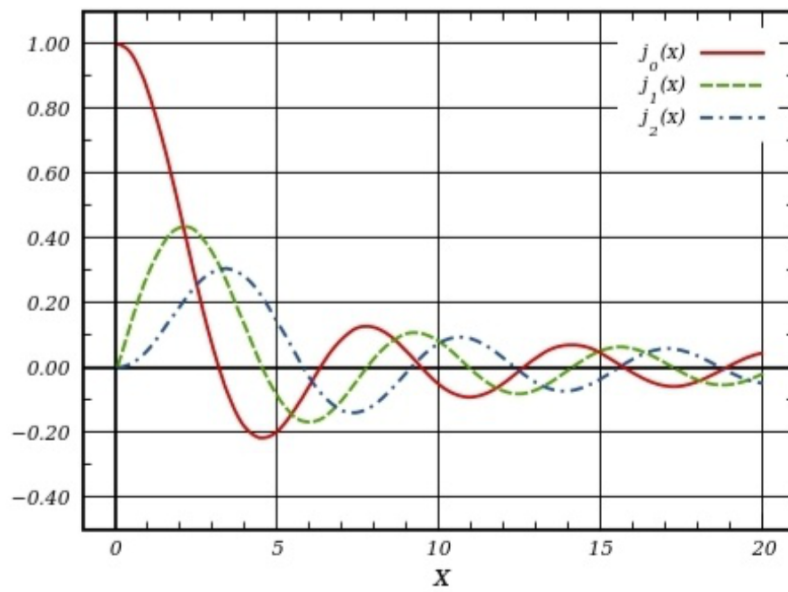
$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) = -(-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos(x)}{x}$$

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

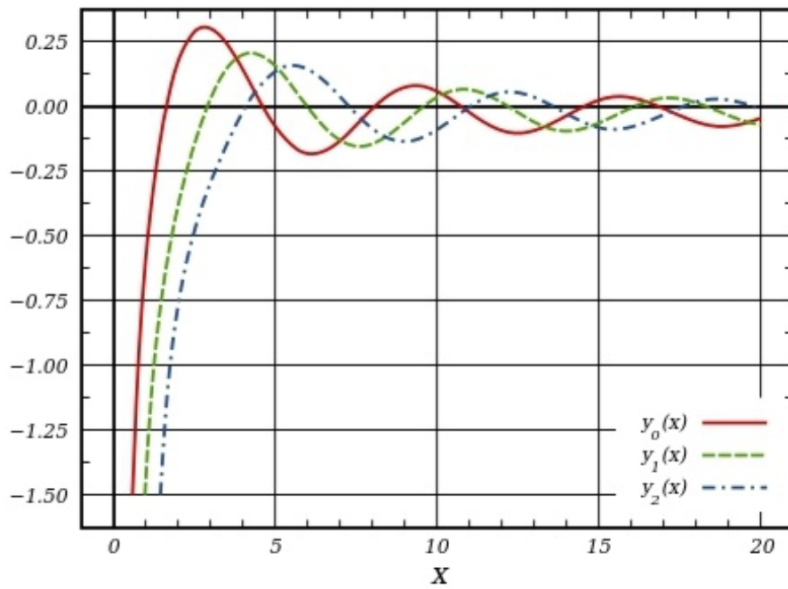
$$n_0(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad n_1(x) = -\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x}$$

F. esféricas de Hankel:

$$\begin{cases} h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i n_n(x) \\ h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i n_n(x) \end{cases}$$



Funciones esféricas de Bessel de primer orden, $j_n(x)$, para $n=0,1,2$

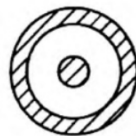


Funciones esféricas de Bessel de segundo orden, $y_n(x)$, para $n=0,1,2$

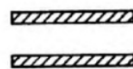
Electrodinámica Clásica

TEM 3

Ondas Confinadas



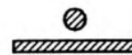
Coaxial line



Parallel-plate line



Parallel wires



Wire over a plate



Suspended strip-line

Alberto José López Torre

1. Introducción

Una guía de ondas es un sistema con simetría traslacional en una dirección (z) por el que se puede propagar una onda electromagnética. Generalmente su forma será una cavidad limitada por paredes conductoras.

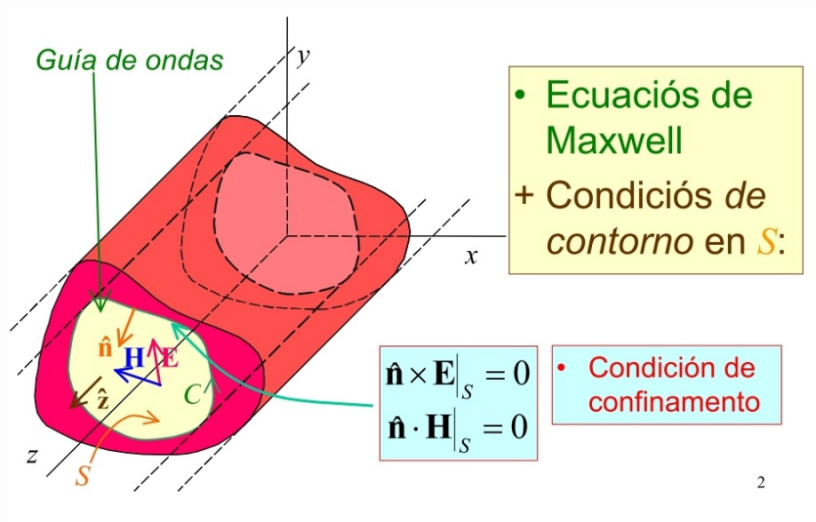
Como bien sabemos, en el interior de un conductor perfecto el campo eléctrico es cero y el campo magnético es constante. Si consideramos solo campos alternos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad \vec{H}(\vec{r}) = \vec{0}$$

solo términos de pérdidas irrelevantes fuera del conductor. Así, en la superficie del conductor:

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E}|_S = \vec{0} & (\vec{E}_{\parallel}|_S = \vec{0}) \\ \hat{n} \cdot \vec{H}|_S = \vec{0} & (\vec{H}_{\perp}|_S = \vec{0}) \end{cases}$$

Condiciones conductor perfecto.



2. Potenciales de Debye

Sea una función vectorial \vec{F} que es solución de la ecuación vectorial de Helmholtz. Está claro que su componente $F_z = \hat{z} \cdot \vec{F}$ también es solución de la ecuación de Helmholtz:

$$\vec{F} / \nabla^2 \vec{F} + \beta^2 \vec{F} = \vec{0} \quad , \quad \hat{z} \cdot (\nabla^2 \vec{F} + \beta^2 \vec{F}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 F_z + \beta^2 F_z = 0$$

Consideremos ahora una función escalar ψ solución de la ecuación de Helmholtz podemos identificar ψ con $H_{||}$ o $E_{||}$, definiendo dos modos:

• Modo transversal eléctrico: (\vec{E} transversal)	$\hat{z} \cdot \vec{E} = 0 \quad \hat{z} \cdot \vec{H} = \psi$	(TE)
• Modo transversal magnético: (\vec{B} transversal)	$\hat{z} \cdot \vec{E} = \psi \quad \hat{z} \cdot \vec{B} = 0$	(TM)

Si los dos campos son transversales tendremos el modo transversal electromagnético:

$$\hat{z} \cdot \vec{E} = 0$$
$$\hat{z} \cdot \vec{B} = 0$$

La existencia de estos modos indica que (en general) la determinación del campo electromagnético a partir de E_z, H_z (potenciales de Debye) no es unívoca.

3. Estudio de los guías de ondas

Sea $k = \beta = \frac{\omega}{v}$ la constante de propagación libre en el interior de la guía (esto es, la constante de propagación si no existiesen paredes conductoras). Nuestro objetivo será buscar un conjunto ortogonal y completo de soluciones a la ecuación de Helmholtz:

los modos normales.

Considérese una sección de guía S_z de ecuación $\hat{z} \cdot \vec{r} = z = \text{cte}$. Exigiremos (para los modos normales) que la dependencia en z de los campos sea sinusoidal:

$$\vec{E}|_z = \vec{E}|_0 e^{-i\beta z} \quad \vec{H}|_z = \vec{H}|_0 e^{-i\beta z}$$

donde $\vec{E}|_z, \vec{H}|_z$ son las restricciones de los campos a la superficie S_z . $\beta = \frac{\omega}{v}$ es la

constante de propagación guiada ($v_f =$ velocidad de fase en la guía).

Definiremos los operadores diferenciales transversales como los operadores diferenciales restringido a la superficie $\vec{r} \cdot \hat{z} = z$, esto es, se aplican como si el campo no dependiese de z .

Divergencia transversal $\nabla_{\perp} \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}_{\perp}$

Gradiente transversal $\vec{u} \cdot \nabla_{\perp} \psi = \nabla_{\perp} (\psi \cdot \vec{u})$

Rotacional transversal $\vec{u} \cdot \nabla_{\perp} \times \vec{F} = \nabla_{\perp} \cdot (\vec{F} \times \vec{u})$

Laplaciano transversal $\nabla_{\perp}^2 \psi = \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi$, $\vec{u} \cdot \nabla_{\perp}^2 \vec{F} = \nabla_{\perp}^2 (\vec{u} \cdot \vec{F})$

Que se relacionen con los operadores habituales mediante:

$$i) \nabla \cdot \vec{F} = \nabla_{\perp} \cdot \vec{F} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad ii) \nabla \times \vec{F} = \nabla_{\perp} \times \vec{F} + \hat{z} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}$$

$$iii) \nabla^2 \psi = \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad iv) \nabla^2 \psi = \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$v) \nabla^2 \vec{F} = \nabla_{\perp}^2 \vec{F} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2}$$

Ejemplo: Comprobar i)

Aplicamos la definición de divergencia transversal $\nabla_{\perp} \cdot \vec{F} \equiv \nabla \cdot \vec{F}_{\perp}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + F_z \hat{z}, \quad \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}_{\perp} + \nabla \cdot (F_z \hat{z}) = \nabla_{\perp} \cdot \vec{F} + \hat{z} \cdot \nabla F_z = \nabla_{\perp} \cdot \vec{F} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla(\alpha\psi) = \alpha \nabla\psi + \psi \nabla\alpha$$

que es lo que queremos comprobar.

Alternativamente podemos definir el operador ∇_{\perp} como aquel tal que $\nabla \equiv \nabla_{\perp} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$, llegando

a las mismas conclusiones (véase "Interacción electromagnética" de Aguilar).

Las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en términos de los operadores diferenciales transversales (en el espacio libre de fuentes, que es el que nos interesa) sin más que emplear la definición de los operadores diferenciales transversales.

Considérese un modo TE o TM y sea ψ un potencial de Debye. Si descomponemos el espacio como

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \beta^2 \psi$$

(i)

Como $\frac{\partial \psi}{\partial z} = -i\beta \psi$, y así:

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = \nabla_{\perp}^2 + (\beta^2 - \beta_z^2) \psi = 0$$

Definiendo $\beta_c \equiv \sqrt{\beta^2 - \beta_z^2}$ como la constante de corte: $\beta_c^2 = \mu\epsilon (\omega^2 - \omega_c^2) = \frac{1}{v^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$

$$\beta_c^2 = \mu\epsilon (\omega^2 - \omega_c^2) = \frac{1}{v^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + \beta_c^2 \psi = 0$$

Esto es: $\underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}_{\nabla_{\perp}^2 \psi} + \underbrace{\beta^2 \psi}_{\beta = \frac{\omega}{c}} - \underbrace{\beta_z^2 \psi}_{\beta_z = \frac{\omega}{v}}$

De la misma forma, dada la expresión del bobinado vertical transversal:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \vec{E} + \beta_c^2 \vec{E} &= \vec{0} \\ \nabla_{\perp}^2 \vec{H} + \beta_c^2 \vec{H} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Ecuaciones de

onda transversales.

Cuando resolvemos estas ecuaciones en la superficie S_{\perp} con condiciones de contorno en la curva \mathcal{C} (frontera de S_{\perp}) vemos que β_c toma un conjunto discreto de valores, conjunto que será doblemente numerable, que dependerá de la geometría, correspondiendo cada

$\beta_{c, nm}$ a un modo de propagación. Para cada uno de estos modos de propagación definimos una frecuencia de corte $\omega_{c, nm}$

$$\omega_{c, nm} \equiv \frac{\beta_{c, nm}}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Como ya habíamos visto, $\beta_z^2 = \mu\epsilon (\omega^2 - \omega_c^2)$. Luego si $\omega < \omega_c$ entonces

$\beta_z \in \mathbb{C}$ y la onda tendrá forma de una exponencial decreciente, a lo que podemos asociar una profundidad de penetración S_{mn}

$$S_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon (\omega_{c,mn}^2 - \omega^2)}}$$

En este caso no hay propagación y se dice que se trata de un modo evanescente.

Podemos obtener fácilmente las velocidades de fase y de grupo en la guía:

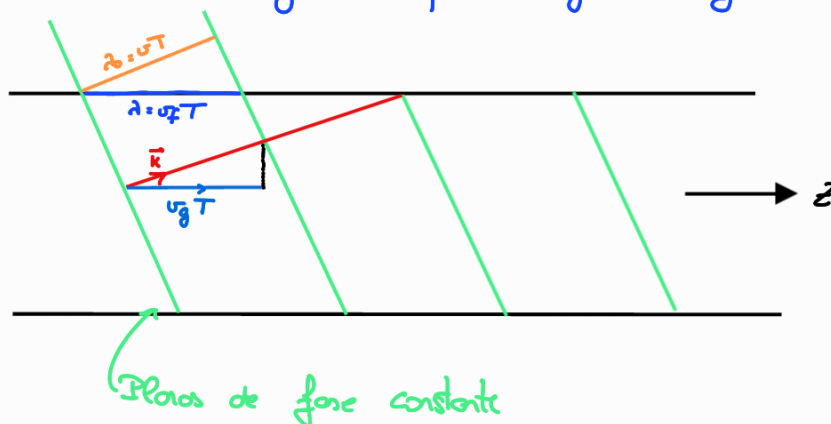
$$v_f = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} = \frac{c}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

$$v_g = \left[\frac{d\beta_z}{d\omega} \right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\omega} = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

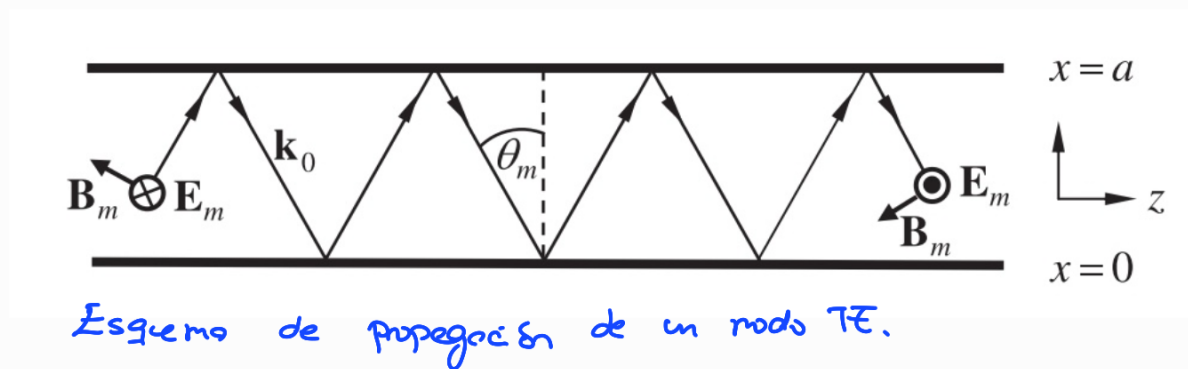
Podemos apreciar que en una guía de ondas la velocidad de fase es siempre mayor que la de grupo:

$$v_g v_f = \frac{c^2}{n^2} = v^2 \quad \text{y} \quad v_g < \frac{c}{n} < v_f$$

El siguiente esquema para una guía rectangular puede ser de ayuda para entender como se propaga una onda electromagnética por una guía rectangular.



- Los planos de fase constante se hayan separados por una distancia $\lambda_0 = vT$, propagándose todos paralelamente y a una velocidad $v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\mu \epsilon}$.
- Para un observador fijo en un punto de la superficie frontera los planos se moverán con la velocidad de fase v_f .
- La velocidad de grupo es la que avanza la onda a lo largo de la guía.



Consideremos que estamos estudiando un modo normal donde, por las características antes mencionadas, hay dos campos \vec{F}, \vec{G} pero solo uno de ellos (por ejemplo \vec{F}) tiene componente longitudinal $F_z \neq 0$. Entonces \vec{G} es transversal $\vec{G} \perp \hat{z}$ y como $\nabla \times \vec{F} = i\omega \vec{G} \Rightarrow \nabla \times \vec{F} \perp \hat{z}$. Además, en ausencia de fuentes $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

Demostremos ahora que $\nabla_{\perp} \times \vec{F}_{\perp} = \vec{0}$

Como es bien sabido podemos descomponer \vec{F} en sus componentes longitudinales y transversales $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$. Así, $\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \vec{F}_{\parallel} + \nabla \times \vec{F}_{\perp}$.

(1) La componente longitudinal de \vec{F} es $\vec{F}_{\parallel} = F_z \hat{z}$, luego $\nabla \times \vec{F}_{\parallel} = \nabla \times (F_z \hat{z}) = \nabla F_z \times \hat{z} + F_z (\nabla \times \hat{z}) = -\hat{z} \times \nabla F_z$.

$$(2) \quad \nabla \times \vec{F}_\perp = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z} + \left(-\frac{\partial F_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \hat{y} \right) = \nabla_\perp \times \vec{F} \\ + \frac{\partial}{\partial z} (-F_y \hat{x} + F_x \hat{y}) = \nabla_\perp \times \vec{F}_\perp + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{z} \times \vec{F}_\perp)$$

$$\text{Así, } \underbrace{\nabla \times \vec{F}}_{\perp \hat{z}} = \underbrace{-\hat{z} \times \nabla F_z}_{\perp \hat{z}} + \nabla_\perp \times \vec{F}_\perp + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} (\hat{z} \times \vec{F}_\perp)}_{\perp \hat{z}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \nabla_\perp \times \vec{F}_\perp \perp \hat{z}$. Pero además podemos operar que $\vec{u}_\perp \cdot (\nabla_\perp \times \vec{F}_\perp) = \nabla_\perp \cdot (\vec{F}_\perp \times \vec{u}_\perp) = 0$ ($\vec{F}_\perp \parallel \vec{u}_\perp$) y entonces $\nabla_\perp \times \vec{F}_\perp \parallel \hat{z}$ pues es perpendicular a todo u_\perp (con dirección transversal). Hemos demostrado entonces que $\nabla_\perp \times \vec{F}_\perp$ es paralelo y perpendicular a \hat{z} , lo que solo es posible si $\nabla_\perp \times \vec{F}_\perp = \vec{0}$.

Además vemos que:

$$\nabla_\perp \cdot \vec{F}_\perp = \nabla_\perp \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} - \frac{\partial F_z}{\partial z} = i\beta_3 F_z$$

El campo \vec{F}_\perp debe cumplir la ecuación de ondas transversal: $\nabla_\perp^2 \vec{F}_\perp = -\beta_c^2 \vec{F}_\perp$

$$\nabla_\perp^2 \vec{F}_\perp = \nabla_\perp (\nabla_\perp \cdot \vec{F}_\perp) - \nabla_\perp \times (\nabla_\perp \times \vec{F}_\perp) = i\beta_3 (\nabla_\perp F_z) = -\beta_c^2 \vec{F}_\perp$$

Con lo que:

$$\boxed{\vec{F}_\perp = -i \frac{\beta_z}{\beta_c^2} (\nabla_\perp F_z)}$$

Esta expresión nos puede resultar muy útil, pues relaciona los componentes transversales de \vec{F} con su componente longitudinal.

Seguiremos discutiendo la obtención de los operadores transversales:

$$\begin{aligned}
 *) \nabla_{\perp} \times \vec{F} &= \nabla_{\perp} \times (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}) = \nabla_{\perp} \times \vec{F}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times (\vec{F}_{\parallel} \hat{z}) = \nabla_{\perp} \times (\vec{F}_{\parallel} \hat{z}) - \frac{\partial}{\partial z} (\hat{z} \times \vec{F}_{\perp}) \\
 &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \hat{y} \right) - \hat{z} \times \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \hat{y} \right) = -\hat{z} \times \nabla_{\perp} F_z - \hat{z} \times \left(i \frac{\beta_1^2}{\beta_2} \vec{F}_{\perp} \right) = \\
 &= -i \frac{\beta_1^2}{\beta_2} (\hat{z} \times \vec{F})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 **) \nabla \times \vec{F} &= \nabla_{\perp} \times \vec{F} + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{z} \times \vec{F}) = -i \frac{\beta_1^2}{\beta_2} (\hat{z} \times \vec{F}) + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{z} \times \vec{F}) = -i \frac{\beta_1^2}{\beta_2} (\hat{z} \times \vec{F}) - i \beta_2 (\hat{z} \times \vec{F}) \\
 &= -i \left(\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\beta_2} \right) (\hat{z} \times \vec{F}) = -i \frac{\beta^2}{\beta_2} (\hat{z} \times \vec{F})
 \end{aligned}$$

Estas expresiones las usaremos en las secciones siguientes.

Armados ya con multitud de identidades podemos discutir las diferentes modos que se pueden propagar en una guía de ondas.

- **Modo TM:** El campo magnético longitudinal se anula: $B_z = 0$. La solución que se obtiene se denomina **onda transversal magnética**.
- **Modo TE:** El campo eléctrico longitudinal se anula: $E_z = 0$. La solución que se obtiene se denomina **onda transversal eléctrica**.
- **Modo TEM:** Se anulan los componentes longitudinales de ambos campos. La solución correspondiente se denomina **onda transversal electromagnética**.

• Modos TM

En esta situación $\vec{F} \equiv \vec{E}$. Por las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega\mu\vec{H} = -i\frac{\beta}{\mu\epsilon}\mu\vec{H} = -i\beta z\vec{H}$$

Esto es:

$$\nabla \times \vec{E} = -i\beta z\vec{H}$$

Por además, por una de las propiedades demostradas: $\nabla \times \vec{E} = -i\frac{\beta^2}{\beta_1}(\hat{z} \times \vec{E})$
(*)

Si combinamos ambas expresiones:

$$\vec{H} = \frac{1}{z_{TM}}(\hat{z} \times \vec{E})$$

donde $z_{TM} \equiv \frac{\beta_2}{\beta} z$ es la impedancia de la onda.

* En resumen, para modos TM: $\vec{z} \cdot \vec{H} = 0$ $\vec{z} \cdot \vec{E} = \psi \neq 0$

$$\vec{E}_z = -i\frac{\beta_1}{\beta^2}\nabla_z E_z \quad \vec{H} = \frac{\beta}{\beta_1}\frac{1}{z}(\hat{z} \times \vec{E})$$
$$E_z|_p = 0$$

• Modos TE

En esta situación $\vec{F} = \vec{H}$. Por las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \epsilon \vec{E} = i\beta \frac{1}{z} \vec{E} :$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\beta \frac{\vec{E}}{z}$$

Por uno de las relaciones ya vistas: $\nabla \times \vec{H} = -i \frac{\beta^2}{\beta_z} (\hat{z} \times \vec{H})$ y así:

$$\vec{E} = -Z_{TE} (\hat{z} \times \vec{H}) \quad Z_{TE} = \frac{\beta}{\beta_z} z$$

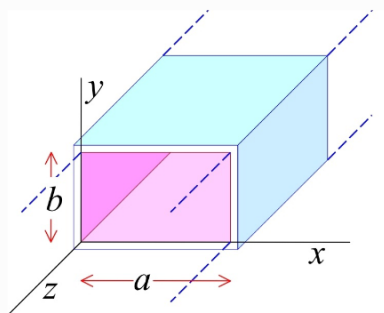
* En resumen, para modos TE: $\vec{z} \cdot \vec{E} = 0$ $\hat{z} \cdot \vec{H} = 0 \neq 0$

$$\vec{H}_z = -i \frac{\beta_z}{\beta^2} \nabla_z H_z \quad \vec{E} = -\frac{\beta}{\beta_z} z (\hat{z} \times \vec{H})$$

$$\hat{n} \cdot \nabla_z H_z |_c = 0$$

* Guía de ondas rectangular (Ejemplo clave)

Consideremos una onda electromagnética que se propaga en el interior de un tubo de sección rectangular y dimensiones a (en x), b (en y) con $a > b$.



En primer lugar resolveremos la ecuación transversal de Helmholtz:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + \beta_c^2 \psi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \beta_c^2 \psi = 0 \quad \text{Separación de variables} \quad \psi(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$yX'' + xY'' + (\beta_c^2 - \beta_z^2)XY = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{=-\beta_x^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=-\beta_y^2} + (\beta_c^2 - \beta_z^2) = 0$$

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta_c^2 = \beta^2 - \beta_z^2$$

Resultado

$$\begin{cases} X'' + \beta_x^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A_1 \cos \beta_x x + B_1 \sin \beta_x x \\ Y'' + \beta_y^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = \dots \end{cases}$$

Así, $\psi(x,y) = (A_1 \cos \beta_x x + B_1 \sin \beta_x x)(A_2 \cos \beta_y y + B_2 \sin \beta_y y)$

Modos TE: Imponemos las condiciones de contorno $\hat{n} \cdot \nabla \psi|_c = 0$, esto es:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{x=a} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{y=b} = 0$$

Resultado entonces el siguiente potencial de Debye:

$$H_{z,mn}^{TE} = \psi_{mn}^{TE}(x,y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Como en los derivadores aparecen senos es evidente que se verifican las condiciones de contorno. El primer índice (m) se corresponde con la dimensión mayor y las constantes de separación son $\beta_x^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2}$, $\beta_y^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$, con lo que los parámetros de corte son:

son:

$$\beta_c^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu \epsilon'}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Modos TM: Imponemos las condiciones de contorno $\Psi|_c = 0$, esto es,

$$\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=a} = \Psi|_{y=0} = \Psi|_{y=b} = 0$$

Resulta así el potencial de Debye

$$E_{z, mn}^{\text{TM}}|_{z=0} = \Psi_{mn}^{\text{TM}}(x, y)|_{z=0} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Los parámetros de corte son los mismos que en el modo TE. Ahora, para $m=0$ o $n=0$ $\Psi=0$, luego el modo TM de frecuencia de corte más baja es el TM_{10} .

* **Modos dominantes**: un modo dominante o fundamental es un modo con frecuencia de corte mayor que la de cualquier otro. Este modo siempre se puede propagar (siempre que se pueda propagar algún modo).

En esta guía de ondas el modo dominante es TE_{10} , que tiene frecuencia de corte

$$\omega_{c10} = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\epsilon}} \Rightarrow \begin{cases} \beta_{c10} = \frac{\pi}{a} \\ \beta_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \end{cases}$$

En este caso los campos son:

$$H_z|_{z=0} = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \Rightarrow H_z(z) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_z z}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_\perp &= -i \frac{\beta_z}{\beta_c^2} \nabla_\perp H_z = -i \beta_z \left(\frac{c^2}{\pi^2}\right) \left[\nabla H_z - \hat{z} \frac{\partial H_z}{\partial z} \right] = \\ &= -i \beta_z \left(\frac{c^2}{\pi^2}\right) \frac{\partial H_z}{\partial z} \hat{x} = -i \beta_z \frac{c^2}{\pi^2} \left[-\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \frac{\pi}{a} e^{-i\beta_z z} H_0 \hat{x} = \\ &= i \frac{\beta_z a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta_z z} \hat{x} \end{aligned}$$

$$\vec{H}(x,z) = H_0 e^{-i\beta_z z} \left[\frac{i\beta_z a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{z} \right]$$

$$\vec{E} = -\frac{\beta}{\beta_2} z (\hat{z} \times \vec{H}) =$$

$$= -\frac{\beta}{\beta_2} z H_0 e^{-i\beta_2 z} \frac{i\beta_2 a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (\hat{z} \times \hat{x})$$

λ_{si} ,

$$\vec{E} = -i \underbrace{\frac{\beta a}{\pi} H_0 z_0}_{E_0} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-i\beta_2 z} \hat{y}$$

Hagamos una pausa para recopilar los resultados obtenidos. Hemos concluido que hay dos tipos de modos de propagación, caracterizados por qué campo, eléctrico o magnético, es transversal a la dirección de propagación:

$$\begin{aligned}
 * \text{ Modo TM: } H_z = 0 \quad \vec{E}_\perp = -i \frac{\beta_z}{\beta_0^2} \nabla_\perp E_z \quad \vec{H}_\perp = \frac{1}{z_{TM}} (\hat{z} \times \vec{E}) \quad z_{TM} = \frac{\beta_z}{\beta} z \\
 * \text{ Modo TE: } E_z = 0 \quad \vec{H}_\perp = -i \frac{\beta_z}{\beta_0^2} \nabla_\perp H_z \quad \vec{E}_\perp = -z_{TE} (\hat{z} \times \vec{H}) \quad z_{TE} = \frac{\beta}{\beta_z} z
 \end{aligned}$$

Estos campos deben cumplir una serie de condiciones de contorno, dado que los campos se hayan confinados por paredes conductoras. Admitiendo que el conductor es perfecto:

$$\boxed{\vec{n} \times \vec{E}|_s = \vec{0}} \quad (+)$$

esto es, las componentes tangenciales de \vec{E} en la superficie frontera son continuas.

En la práctica empleamos las dos siguientes condiciones de contorno, que implican (+):

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 E_z|_s &= 0 \quad (\text{Ondas TM}) \\
 \frac{\partial H_z}{\partial n}|_s &= 0 \quad (\text{Ondas TE})
 \end{aligned}
 }$$

Por medio de la ley de Faraday podemos demostrar que (+) implica que $\vec{n} \cdot \vec{H}|_s = 0$:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\hat{n} \cdot \vec{B}) \Rightarrow \nabla \cdot (\hat{n} \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot \nabla \times \hat{n} = \nabla \cdot (\hat{n} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\hat{n} \cdot \vec{B})$$

$$\text{Como por hipótesis } \hat{n} \times \vec{E}|_s = \vec{0}, \quad \nabla \cdot (\hat{n} \times \vec{E})|_s = -\frac{\partial}{\partial t} (\hat{n} \cdot \vec{B})|_s = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{B} = \text{cte} = 0$$

No obstante la demostración no funciona en sentido contrario.

Por último, es importante recordar que solo puede haber propagación si la frecuencia es mayor que la de corte, y que solo se propagarán ciertos modos, que obtendremos al resolver la ecuación de Helmholtz e imponer las condiciones de contorno.

• Modos TEM

Consideremos la situación:

$$E_z = H_z = 0, \quad E_{\perp}, H_{\perp} \neq \vec{0}$$

para que se siga cumpliendo $\vec{F}_{\perp} = -i \frac{\beta_z}{\beta_c^2} \nabla F_z$ es necesario que $\beta_c = 0$.

Esto implica que $0 = \beta_c^2 = \beta^2 - \beta_z^2 \Rightarrow \beta = \beta_z$, las velocidades de propagación libre y guiada son iguales (no hay dispersión).

Ahora bien, escribamos que bajo estas condiciones:

$$\nabla_{\perp} \times \vec{H} = -i \frac{\beta_c^2}{\beta_z} \hat{z} \times \vec{H} = \vec{0}$$

$$\nabla_{\perp} \times \vec{E} = -i \frac{\beta_c^2}{\beta_z} \hat{z} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Solo será posible obtener un campo eléctrico no nulo si

$$\vec{E} = -\nabla_{\perp} \phi$$

donde ϕ se denomina **función potencial**. Pero si el contorno que limita a S_{\perp} es simple (S_{\perp} simplemente conexo), entonces $\psi|_c = \text{cte}$ y $\psi|_{s_{\perp}} = \text{cte}$, lo que llevaría a que $\vec{E} = \vec{0}$. De esta forma el modo TEM solo existe si S_{\perp} es **múltiplemente conexo**, siendo entonces la condición de contorno

$$\psi|_{s_i} = \phi_i(z)$$

El razonamiento anterior se basa en que \vec{E} es perpendicular a la frontera, luego ϕ es $\nabla\phi$ y por ello será constante sobre la superficie (fig 1-18 del Litzgrem) frontera. Ahora, es un resultado conocido que si una solución de la ec. Laplace es constante en la frontera, será constante y de mismo valor en el resto de puntos, dando lugar a $\nabla\phi=0$.

Otro argumento que nos convence de que S_{\perp} debe de ser múltiplemente conexa es que en un medio l.h.i. estamos suponiendo también que $\nabla_{\perp}\bar{H}=0$ por lo que $\bar{H}=0$ salvo que S_{\perp} no sea s.c. En cualquier caso, como $\beta_1=\beta_2$

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\hat{z} \times \bar{E})$$

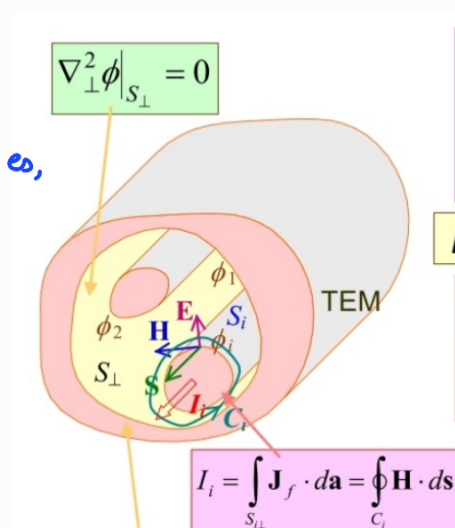
y la impedancia de la onda es la impedancia del medio: $Z_{TEM} = Z$

Además, como $E_z=0 \Rightarrow J_z^{(d)}=0$, en una curva C_i que rodea a un conductor tendremos que:

$$I_i(z) = \int_{S_i} \bar{J}_f \cdot d\bar{a} = \oint_{C_i} \bar{H} \cdot d\bar{s}$$

* Un modo TEM se propagará siempre que exista \emptyset

posibilidad de que pueda haber un modo TEM, esto es, la superficie no sea simplemente conexa.



Dado el caso más simple, esto es, una línea de transmisión de dos conductores paralelos definiremos $Z_{cor} \equiv \frac{\phi_1 - \phi_2}{I_1}$. Como la diferencia de los campos en z es la misma $Z_{cor} \neq Z_{cor}(z)$

• EJEMPLO: Cable coaxial

Debemos resolver la ecuación $\vec{E} = -\nabla_{\perp} \phi$ en las condiciones $\phi(a) = \phi_1, \phi(b) = \phi_2$.

Esto es, resolver la ecuación de Poisson homogénea:

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = 0 \quad \text{Así,}$$

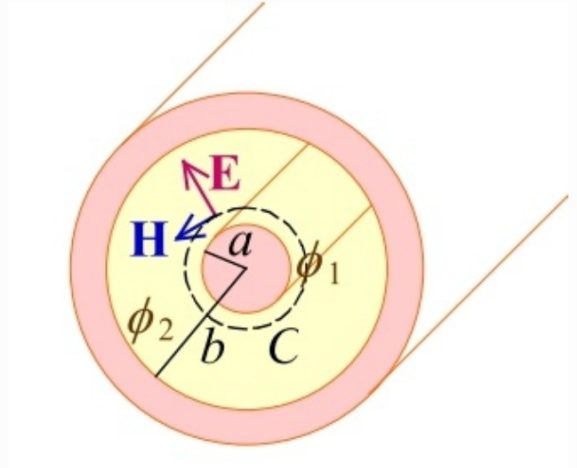
$$\phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\log(b/a)} \log(\rho) + B \Rightarrow \vec{E}(\rho) = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\log(b/a)} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2} (\hat{z} \times \vec{E}) = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2 \log(b/a)} \frac{\hat{z} \times \hat{\rho}}{\rho} \quad \text{La circulación de } \vec{H} \text{ alrededor del conductor central}$$

vendrá dado por

$$I_1 = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{2\pi(\phi_1 - \phi_2)}{\log(b/a)}$$

$$Z_{cor} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{I_1} = \frac{\log(b/a)}{2\pi}$$



* Laboratorio de Electrodinámica: Líneas de transmisión

Una línea de transmisión es un sistema de guías de ondas electromagnéticas con más de un conductor. En este sistema para frecuencias menores a ω crítica del primer modo TE o TM solo se propagarán modos TEM.

Las ecuaciones de una línea de transmisión son:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} - GV$$

Cuando una línea de transmisión se conecta a un voltaje periódico las intensidades que circulan no son periódicas hasta que haya pasado un tiempo (técnicamente infinito). Decimos que nos encontramos en el régimen permanente cuando tiene lugar el comportamiento periódico, y cuando ω respuesta no es periódica se denomina régimen transitorio.

Trabajando en el régimen permanente, suponemos

$$V(z, t) = V_m(z) e^{i\omega t} \quad I(z, t) = I_m(z) e^{i\omega t}$$

Se obtiene a partir de las ecuaciones para una línea sin pérdidas

que:

$$V_m(z) = V_m^+ e^{-ikz} + V_m^- e^{ikz} \quad k = \frac{\omega}{u} = \omega \sqrt{LC}$$

$$I_m(z) = I_m^+ e^{-ikz} + I_m^- e^{ikz}$$

Se define la impedancia característica de la línea de transmisión como

$$Z_0 = \frac{L\omega}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

y la impedancia en un punto:

$$Z(z) = \frac{V_m}{I_m} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{2ikz}}{1 - \Gamma_L e^{2ikz}}$$

donde $\Gamma_L = \frac{V_m^-}{V_m^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ es el coeficiente de reflexión, con:

$$Z_L = \frac{V_m(z)}{I_m(z)} \quad (\text{impedancia en un extremo}).$$

De esto forma $V^- = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V^+$

Si $Z_L = Z_0$ no hay reflexión, se dice que la carga absorbe todo el
energía de la onda incidente y la línea está adaptada.

4. Cavidades resonantes

Una cavidad resonante es un volumen limitado por una superficie S conductora. Las condiciones de contorno vienen dadas por

$$\hat{n} \times \bar{E}|_S = \vec{0} \quad \hat{n} \cdot \bar{H}|_S = 0$$

Estas condiciones hacen que β tome un conjunto discreto de valores $\{\beta_{mnp}\}$ cada uno de los cuales se corresponde con una frecuencia de resonancia ω_{mnp} y cada uno excita una solución $(TE, TM)_{mnp}$.

Podemos pensar en una cavidad como en una guía de ondas de longitud l con los extremos limitados por superficies conductoras S_1, S_2 .

- Modos TE: $\Psi^\pm = H_z^\pm$

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot \bar{H}|_{S_1} = 0 & (\Psi^+ + \Psi^-)|_{z=0} = 0 \\ \hat{n} \cdot \bar{H}|_{S_2} = 0 & (\Psi^+ e^{-i\beta_2 l} + \Psi^- e^{i\beta_2 l})|_{z=l} = 0 \end{cases}$$

- Modos TM: $\Psi^\pm = E_z^\pm$

$$\begin{cases} \hat{n} \times \bar{E}|_{S_1} = \vec{0} & i \frac{\beta_1}{\beta_c^2} \nabla_\perp \Psi^+ + i \frac{(-\beta_1)}{\beta_c^2} \nabla_\perp \Psi^- = 0 \\ \hat{n} \times \bar{E}|_{S_2} = \vec{0} & i \frac{\beta_2}{\beta_c^2} \nabla_\perp \Psi^+ e^{-i\beta_2 l} + i \frac{(-\beta_2)}{\beta_c^2} \nabla_\perp \Psi^- e^{i\beta_2 l} = 0 \end{cases}$$

En los dos casos:

$$\begin{cases} \Psi^+|_0 \pm \Psi^-|_0 = 0 \\ e^{-i\beta_2 l} - e^{i\beta_2 l} = -2i \sin(\beta_2 l) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta_2 l = p\pi} \quad p \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

• EJEMPLO: Cavity resonante rectangular en modo

TE₁₀₁.

Si partimos de una guía rectangular operando en el modo fundamental TE₁₀ podemos construir una cavity resonante si la cerramos con dos planos conductores perpendiculares al eje z en $z=0$, $z=l$.

$$\text{En el modo TE}_{10}: H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\beta_z z} \quad \vec{H}_\perp = \hat{x} \frac{i\beta_z a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta_z z}$$

Los campos propagándose en el sentido positivo del eje z:

$$\vec{H}^+ = H_0^+ \left(\hat{z} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \hat{x} \frac{i\beta_z a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right) e^{-i\beta_z z}$$
$$\vec{E}^+ = -\hat{y} \frac{E_0}{\pi} z \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta_z z} \vec{H}_0^+$$

En el sentido negativo: $\beta_z \rightarrow -\beta_z$ (ondas reflejadas)

$$\vec{H}^- = H_0^- \left(\hat{z} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \hat{x} \frac{i\beta_z a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right) e^{i\beta_z z}$$
$$\vec{E}^- = -\hat{y} \frac{E_0}{\pi} z \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\beta_z z} \vec{H}_0^-$$

Los campos $\vec{E} = \vec{E}^+ + \vec{E}^-$, $\vec{H} = \vec{H}^+ + \vec{H}^-$ deberán satisfacer

$$\hat{n} \times \vec{E}|_S = \vec{0} \quad \hat{n} \cdot \vec{H}|_S = 0 \quad z=0, l$$

Si imponemos lo segundo (lo primero se verifica trivialmente en un modo TE) se llega a que

$$H_0^+ = -H_0^- = -\frac{H_0}{2}$$

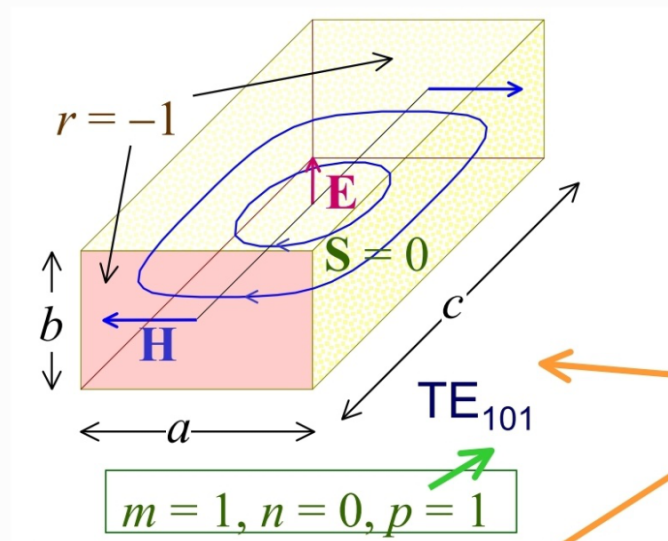
$$\beta_z = \frac{\pi l}{a}$$

y así, para el modo fundamental ($p=1$):

$$\vec{E} = \hat{y} \frac{\beta_0}{\pi} z H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$

$$\vec{H} = i H_0 \left[\hat{z} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right) - \hat{x} \frac{a}{c} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right) \right]$$

El modo i indica que está desfasado $\frac{\pi}{2}$ respecto a \vec{E} .



5. Pérdidas en guías de ondas y cavidades resonantes

Hemos asumido en todo lo anterior que las condiciones de frontera se cumplen perfectamente. No obstante los conductores tienen una impedancia superficial $Z_s = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$ que hace que el campo eléctrico tenga componente tangencial $\vec{E}_t = Z_s \vec{k}_f$, aunque es pequeña que los campos calculados. De introduciremos por el estudio de las pérdidas energéticas.

La potencia disipada en la superficie viene dada por

$$P_{dis} = \int_S \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle \cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \int_S \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*] d\vec{\sigma}$$

Empleando $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{k}_f$ llegamos a que

$$P_{dis} = \frac{1}{2} \int_{S'} |\vec{H}|^2 \text{Re}(Z_s) da$$

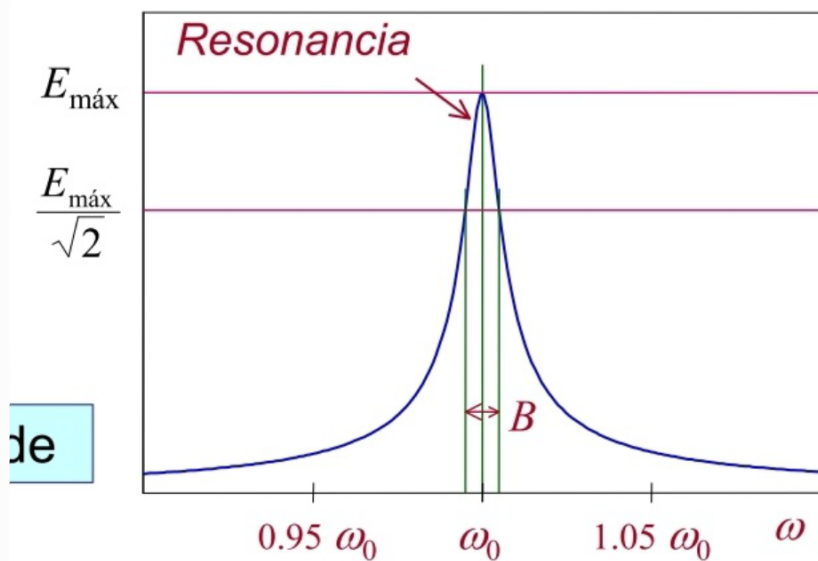
donde S' es la superficie interior (con $\hat{n} = -\hat{n}$) y $\text{Re}(Z_s) = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$

En una cavidad resonante definimos el factor de calidad como una relación entre la energía electromagnética contenida en la cavidad y la potencia disipada

$$Q \equiv \frac{2\pi U_{em}}{T P_{dis}} = \frac{\omega_0 U_{em}}{P_{dis}}$$

En el caso ideal $Q_{ideal} = \infty$, $P_{disideal} = 0$. El ancho de banda se define como:

$$B = -\frac{\omega_0 E}{2D}$$



A la hora de calcular las pérdidas en una guía de ondas, cuando estas pérdidas son pequeñas se suele hacer la siguiente aproximación. Supongamos que, además de la dependencia en z de los campos ya estudiada, existe un factor $e^{-\Sigma z}$,

$$\vec{E}, \vec{B} \sim e^{-i\beta z} e^{-\Sigma z} \Rightarrow \langle P \rangle = \langle P(0) \rangle e^{-2\Sigma z}$$

La constante de atenuación Σ puede obtenerse a partir de

$$\Sigma = -\frac{1}{2\langle P \rangle} \frac{d\langle P \rangle}{dz} = +\frac{1}{2\langle P \rangle} \frac{d\langle P_{dis} \rangle}{dz}$$

Pues si consideramos un trazo de línea de longitud Δz :



Podemos realizar la siguiente aproximación:

$$\langle P(z) \rangle \approx \langle \Delta P_{dis} \rangle + \langle P \rangle(z) + \Delta z \frac{d\langle P \rangle}{dz}$$

Con lo que si $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta P_{dis} \rangle}{\Delta z} = - \frac{d\langle P \rangle}{dz} = \frac{d\langle P_{dis} \rangle}{dz}$$

La potencia disipada se puede obtener, considerando los pérdidas en los conductores, como:

$$\langle P_{dis} \rangle = \frac{1}{2} \int_S |H|^2 \operatorname{Re}(Z_s) da$$

Recordando que, para buenos conductores:

$$Z_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1 + i)$$

Electrodinámica Clásica

BLOQUE II

RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

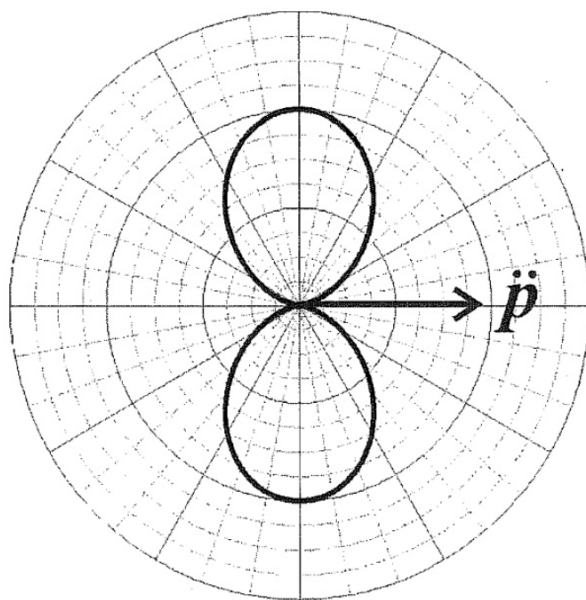
"Al centrar nuestra atención en el caso general de la Electrodinámica... la primera impresión es la enorme complejidad de los problemas a resolver"

Max Planck

Electrodinámica Clásica

TEMA 4

Campos de fuentes extendidas



1. Introducción

Los ondas electromagnéticas se propagan independientemente de las fuentes, pero son producidas en un proceso denominado **radiación**. Es necesario considerar entonces las ecuaciones de Maxwell con fuentes ρ y \vec{J} .

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos las ecuaciones de ondas con fuentes

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \\ \left(\nabla^2 - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = -\mu (\nabla \times \vec{J}) \end{cases}$$

Para simplificar estas ecuaciones se escriben de la forma

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g$$

Suponiendo que estamos en el vacío. $\psi(\vec{r}, t)$ representa la componente de

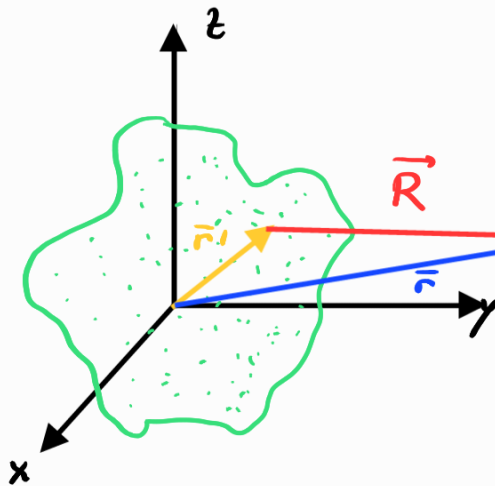
un campo en la dirección arbitraria \hat{u} dada por $\hat{u} \cdot \nabla \vec{F} = \nabla^2 (\hat{u} \cdot \vec{F})$, $\forall \hat{u} \in \mathbb{R}$

$g(\vec{r}', t')$ es la densidad de fuente contenida en un volumen V' finito, y nula

fuera de un intervalo temporal también finito. Si $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, introduciremos el

Concepto de tiempo remoto:

$$t' = t - \frac{R}{c}$$



de una fuente se produce en un tiempo t' , y el efecto (campo) llega a r en t .

2. Derivación de fuentes remotas

Definiremos un operador de tiempo remoto / operador de traslación a tiempo remoto como

$$\mathcal{R}: (\vec{r}, \vec{r}', t) \in \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathcal{R}(\vec{r}, \vec{r}', t) = \left(\vec{r}, \underbrace{t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}}_{t'} \right)$$

Empleando este operador escribiremos a partir de las fuentes:

$$\begin{aligned} [\rho](\vec{r}, \vec{r}', t) &= \rho(\vec{r}', t) \circ \mathcal{R} \\ [\vec{j}](\vec{r}, \vec{r}', t) &= \vec{j}(\vec{r}', t) \circ \mathcal{R} \end{aligned}$$

Esencialmente lo que ocurre es que ρ depende de una coordenada temporal

"incómodo" porque no es la misma que ψ . $[\rho]$ depende de \vec{r}' , que

usamos para obtener la coordenada t mediante: $t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$

Definiremos $[\dot{p}] = \frac{\partial [p]}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t'}$ $[\dot{\vec{J}}] = \frac{\partial [\vec{J}]}{\partial t} = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t'}$

De esta forma tendremos las siguientes propiedades

i) $\nabla [p] = \frac{\partial p}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{\hat{R}}{c} [\dot{p}]$

ii) $\nabla \cdot [\vec{J}] = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \cdot \nabla t' = -\frac{\hat{R}}{c} \cdot [\dot{\vec{J}}]$

iii) $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \times \nabla t' = -\frac{\hat{R}}{c} \times [\dot{\vec{J}}]$

Es "importante" recordar que: $t' = t'(\vec{r}, \vec{r}')$ y

$$\nabla t' = \nabla t - \frac{\nabla(\vec{r} - \vec{r}')}{c} = -\frac{\hat{R}}{c} = -\nabla' t'$$

v) $\nabla [p] = \left[\frac{\partial p'}{\partial t'} \cdot \nabla t' \right]; \quad \nabla' [p] = [\nabla' p] + \left[\frac{\partial p}{\partial t'} \nabla' t' \right]$

vii) $[\nabla' p] = \nabla [p] + \nabla' [p]$

viii) $[\nabla' \cdot \vec{J}] = \nabla \cdot [\vec{J}] + \nabla' \cdot [\vec{J}]$

ix) $[\nabla' \times \vec{J}] = \nabla \times [\vec{J}] + \nabla' \times [\vec{J}]$

* Personalmente encuentro todo lo relacionado con el "operador de tiempo remoto" muy confuso.

La idea es sencilla en que si tenemos una función $f = f(t)$ (puede depender de otras variables)

los corchetes indican que dependerá del tiempo remoto $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$. De esta forma para poder

introducir t' en $[f]$ necesitaremos conocer \vec{r}, \vec{r}' . Por ejemplo

$$p = p(t) \quad \text{y} \quad [p] = p(t') = p\left(t - \frac{R}{c}\right)$$

3. Solución de la ecuación de ondas con fuentes

Si tratamos de resolver la ecuación de ondas con fuentes

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g$$

mediante un desarrollo largo y relativamente tedioso llegaremos a que

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{g(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV'$$

esta expresión se conoce como **potencial retardado**. Se integra en un instante anterior, en el momento en que la fuente "creó" el campo.

De forma más compacta:

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{[g](\vec{r}, \vec{r}', t)}{R} dV'$$

El corchete esencialmente quiere decir que evaluamos la fuente en el tiempo retardado t' (e interpretamos \vec{r}', t' por obtener $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$)

Podemos ser unos atrevidos valientes y sustituir directamente los fuentes de los campos \vec{E} , \vec{B} como aparecen en las ecuaciones de onda inhomogéneas:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{R} \left[-\nabla' \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{ret} dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} [\nabla' \times \vec{J}]_{ret}$$

Pero como es evidente estas expresiones no son cómodas de usar, pues en el interior de la integral encontraremos derivadas espaciales, que además habrá que evaluar en el tiempo remoto, al estar dentro de los corchetes.

Empleando las propiedades ya vistas se puede llegar a unas

expresiones más simples por los campos:

Funciones de Jefimenko

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left\{ \frac{\hat{R}}{R^2} [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} + \frac{\hat{R}}{cR} \left[\frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{ret} - \frac{1}{c^2 R} \left[\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{ret} \right\} dV' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{[\rho]}{R^2} \hat{R} dV' + \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{V'} \frac{\hat{R} (\vec{e} \cdot [\vec{J}]) + \hat{R} \times (\hat{R} \cdot [\vec{J}])}{R^2} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times [\vec{J}])}{R} dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left\{ [\vec{J}(\vec{r}', t')] \times \frac{\hat{R}}{R^2} + \left[\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right] \times \frac{\hat{R}}{cR} \right\} dV' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{J}(\vec{r}', t')] \times \hat{R}}{R^2} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V'} \left[\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right] \times \frac{\hat{R}}{R} dV'$$

Campo cuasiestático: Dominio cuando $R \rightarrow 0$ (pequeñas distancias)

Campo de radiación: Predomina si $R \rightarrow \infty$ y se tiene un transporte de energía

hacia el infinito. El vector de Poynting de estos campos tiene dirección

radial y dependencia en r^{-2} , y como

$$P_{rad}(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_S \vec{S}(t) \cdot d\vec{a}$$

Podemos interpretar este vector de Poynting como la derivada de la potencia con

respecto al ángulo sólido.

* Normalmente no se usan las fórmulas de Jefimenko por calcular los campos por dificultades matemáticas.

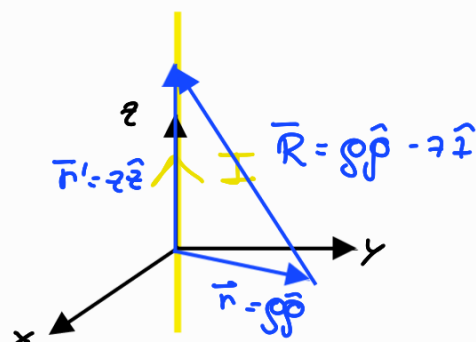
• Ejemplo: Aplicación de las ecuaciones de Jefimenko

Sea un hilo neutro, recto e infinito por el que pasa una corriente:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

obtener el campo electromagnético.

Por las ecuaciones de Jefimenko



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left\{ \frac{\hat{R}}{R^2} [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} + \frac{\hat{R}}{cR} \left[\frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{ret} - \frac{1}{c^2 R} \left[\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{ret} \right\} d\sigma' =$$

por $[\rho] = 0$, $[\dot{\rho}] = 0$.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\dot{\vec{j}}]}{R} d\sigma'. \text{ Al tratarse de una corriente filamental } [\dot{\vec{j}}] \rightarrow \dot{I}$$

$$d\sigma' = d\ell'$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{c} \int_{\mathcal{L}} \frac{[\dot{I}]}{R} d\ell'$$

Debemos obtener \dot{I} . Como $I(t) = I_0 \Theta(t)$ siendo Θ la función escalón, $\dot{\Theta} = 0 \forall t \neq 0$, $\dot{\Theta}(0) = \infty$. Ahora, debemos evaluar en $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}$

Así,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \hat{e}_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\dot{I}]}{R} dz' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \hat{e}_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_0 \delta\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}\right)}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} dz'$$

Como el integrando es una función par:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} 2 \int_0^\infty \frac{I_0 \delta\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}\right)}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} dz'$$

Si $r = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$; $dr = \frac{z' dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \Rightarrow \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \frac{dr}{z'} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -2 \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_0^\infty \frac{I_0 \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dr = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^\infty \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dr$$

Pero como $\delta\left(t - \frac{r}{c}\right) = \delta\left(\frac{ct-r}{c}\right) = c \delta(ct-r)$ pues $\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\hat{z} \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\delta(ct-r)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dr = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}$$

Donde hemos aplicado la propiedad por excelencia de la delta de Dirac:

$$\int_a^b \delta(x-y) f(x) dx = f(y)$$

Así,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \hat{z}$$

Pero aún nos queda el campo magnético:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \left[\vec{J}(\vec{r}', t') \right] \times \frac{\hat{R}}{R^2} + \left[\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right] \times \frac{\hat{R}}{cR} \right\} dV'$$

De nuevo $I(t) = I_0 \Theta(t)$; $\dot{I}(t) = I_0 \delta(t)$ y:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I_0 \hat{z} \Theta\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}\right) \times (\rho \hat{\rho} - z' \hat{z})}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} dz' + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_L \frac{I_0 \hat{z} \delta\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}\right) \times (\rho \hat{\rho} - z' \hat{z})}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} dz'$$

(*) $\hat{z} \times \hat{z} = \vec{0}$

I₁

$$I_1 = I_0 \rho \hat{\phi} \int_L \frac{\Theta(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c})}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} dz'$$

Aquí nos preguntamos qué valores de z' hacen que $t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c} > 0$ pues para el resto de valores $\Theta = 0$ por definición: $\Theta(\tau) = 0$ si $\tau < 0$

i) Si $t < \frac{\rho}{c}$ no existe ningún z' tal que $t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c} > 0$ pues $z'^2 > 0$

ii) Si $t > \frac{\rho}{c}$, z' debe ser tal que: $-\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2} < z' < \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}$

¿Como explicamos físicamente esto? El caso i) se justifica que no recibiremos ningún efecto del campo hasta que pase en $t_{min} = \frac{\rho}{c}$ el ser ρ la distancia al punto más próximo del cable.

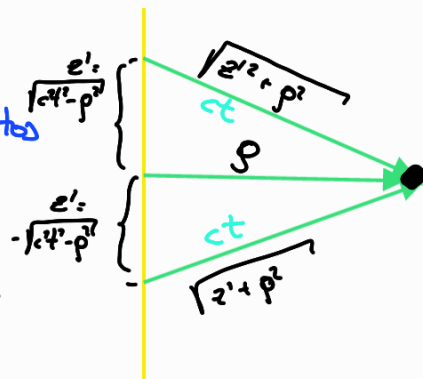
ii) Si $t > \frac{\rho}{c}$ ya nos llega más "información" de otros puntos:

puntos:

La relación entre estos puntos

es que tienen toda una

Coordenada $z' \in \pm \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}$



Si ha pasado un tiempo $t > \frac{\rho}{c}$ nos llegó información también de otros puntos a una distancia ct .

Vamos ahora en el integral:

$$I_1 = I_0 \rho \hat{\phi} \int_{-\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}^{+\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{1}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} dz' = 2 I_0 \rho \hat{\phi} \int_0^{+\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{1}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} dz'$$

Este integral está tabulado:

$$\int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{z'}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z'^2}} \Big|_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho^2 c t}$$

$$\text{Así, } I_1 = \frac{2I_0 \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{c t \rho} \hat{\rho}$$

I_2

$$I_2 = \rho \hat{\rho} I_0 \int_L \frac{\delta\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}\right)}{(\rho^2 + z'^2)} dz'$$

Emplearemos ahora la siguiente propiedad de la delta de Dirac:

$$\delta(f(y)) = \sum_i \frac{\delta(y - y_i)}{|f'(y_i)|}$$

donde y_i son los ceros de $f(y)$ ($y_i / f(y_i) = 0$). La función será

$$t'(z') = t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}; \quad t'(z') = 0 \Rightarrow z'_i = \pm \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2} \quad y$$

$$\frac{dt'}{dz'} = -\frac{z'}{c\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \Rightarrow \left| \frac{dt'}{dz'} \right|_{z'_i} = \left| -\frac{\pm \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{c\sqrt{c^2 t^2}} \right| = \frac{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{c^2 t}$$

$$\text{Esto es: } \delta\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}\right) = \frac{c^2 t}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \left[\delta(z' - \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}) + \delta(z' + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}) \right]$$

$$I_2 = \rho \hat{\rho} I_0 \int_L \frac{\delta\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}\right)}{(\rho^2 + z'^2)} dz' = \frac{\rho I_0 \hat{\rho} c^2 t}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(z' - \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}) + \delta(z' + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2})}{(\rho^2 + z'^2)} dz'$$

Empleando de nuevo el resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) f(x) dx = f(y)$$

$$I_2 = \frac{\rho I_0 \hat{\rho} c^2 t}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{2}{\rho^2 + c^2 t^2 - \rho^2} = \frac{I_0 \rho 2}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2} t} \hat{\rho}$$

Así,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I_0 \hat{z} \Theta\left(t - \frac{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}{c}\right) \times (\rho \hat{\rho} - z' \hat{z}')}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} d\tau'$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_L \frac{I_0 \hat{z} \delta\left(t - \frac{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}{c}\right) \times (\rho \hat{\rho} - z' \hat{z}')}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} d\tau' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2I_0 \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{c t \rho} \hat{\phi} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi c} \left(\frac{I_0 \rho}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \hat{\phi} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi c t} \hat{\phi} \left(\frac{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} + \frac{\rho}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi c t} \hat{\phi} \left(\frac{c^2 t^2 - \rho^2 + \rho^2}{\rho \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c t}{\rho \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \hat{\phi}$$

Findwerte:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \hat{z}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c t}{\rho \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \hat{\phi}$$

4. Campos de radiación

Los términos

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times [\dot{\vec{J}}])}{R} dV'$$

$$\vec{B}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V'} \frac{[\dot{\vec{J}}] \cdot \hat{R}}{R} dV'$$

predominan si $R \rightarrow \infty$. Si $R \gg \text{dim}(V)$:

$$\vec{E}_{\text{rad}}(R \rightarrow \infty) = -c \langle \hat{R} \rangle \times \vec{B}_{\text{rad}} ; \quad \vec{B}_{\text{rad}}(R \rightarrow \infty) = \frac{1}{c} \langle \hat{R} \rangle \times \vec{E}_{\text{rad}}$$

$$\vec{B}_{\text{rad}}(R \rightarrow \infty) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\langle \hat{R} \rangle}{\langle R \rangle} \times \int_{V'} [\dot{\vec{J}}] dV'$$

$$\text{Y si } r' \ll r \quad \vec{B}_{\text{rad}}(r \rightarrow \infty) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\hat{r}}{r} \times \int_{V'} [\dot{\vec{J}}] dV'$$

$$\vec{E}_{\text{rad}}(r \rightarrow \infty) = -c^2 \times \vec{B}_{\text{rad}} , \quad \vec{B}_{\text{rad}}(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E}_{\text{rad}}$$

De esto forma el vector de Poynting queda como

$$S_{\text{rad}} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{\hat{r}}{r^2} \left| \hat{r} \times \int_{V'} [\dot{\vec{J}}] dV' \right|^2$$

Y la potencia:

$$P_{\text{rad}} = \oint_{S'} \vec{S}_{\text{rad}} \cdot d\vec{\sigma} \geq 0 \quad \frac{dP_{\text{rad}}}{dR} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left| \hat{r} \times \int_{V'} [\dot{\vec{J}}] dV' \right|^2$$

resultará siempre positiva e igual para cualquier distancia, debido al factor $1/r^2$ (siendo S una esfera centrada en las fuentes). Se dice que los campos de radiación

son unos componentes de los campos desligados de las fuentes, pues la energía radiada no "vuelva" aunque se invierta la variación temporal de las fuentes.

• Campos dipolo eléctrico

Definiremos el dipolo eléctrico como una distribución de carga neta nula $Q = \int_V \rho dV' = 0$ distribuido en un volumen de dimensiones despreciables en comparación con la distancia a la que observamos el campo ($r' \ll r$). Su momento dipolar se define como

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho dV'$$

Admitiremos que la velocidad de variación de ρ es lo suficientemente baja para que $[\rho]$ no tenga momentos de orden superior. Bajo estas suposiciones, si $\vec{p} = p \hat{z}$ y si la variación del momento dipolar es sinusoidal con frecuencia $\omega = kc$, mediante las ecuaciones de Jefimenko se pueden obtener los siguientes campos:

$$\vec{E} = -\frac{pk^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ikr}}{kr} \left\{ \hat{r} \left(-\frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) 2\cos\theta + \hat{\theta} \left(1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin\theta \right\}$$
$$\vec{B} = -\frac{pk^3}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^{-ikr}}{kr} \hat{\phi} \left(1 - \frac{i}{kr} \right) \sin\theta$$

Aquí es importante especificar que dependiendo de la zona en la que nos encontremos predominarán ciertos términos.

1. ZONA ESTÁTICA: $kr \ll 1$ Predomina el campo electrostático.

$$\vec{E}_{\text{est}} = \lim_{k \rightarrow 0} \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} 2\cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta}{r^3} = \text{Campo dipolo estático}$$

$$\vec{B}_{\text{est}} = \lim_{k \rightarrow 0} \vec{B} = \vec{0}$$

2. ZONA DE RADIACIÓN: $kr \gg 1$ Predominan los componentes que van con $1/r$

$$\vec{E}_{kr \gg \lambda} = \vec{E}_{\text{rad}} = -\hat{\theta} \frac{pk^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta$$

$$\vec{B}_{kr \gg \lambda} = \vec{B}_{\text{rad}} = -\hat{\phi} \frac{\mu_0 pk^2}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta$$

* Como ya hemos visto que sucedía en los campos de radiación:

$$\begin{cases} \vec{B}_{\text{rad}} = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E}_{\text{rad}} \\ \vec{E}_{\text{rad}} = -c \hat{r} \times \vec{B}_{\text{rad}} \end{cases}$$

* El vector de Poynting es de la forma $\langle \vec{S} \rangle \sim \frac{\hat{r}}{r^2}$ y la potencia que atraviesa cualquier esfera centrada en el dipolo es la misma

$$P \neq P(r)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{p^2 c k^4}{2(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r} \quad P = \frac{p^2 c k^4}{12\pi \epsilon_0}$$

3. ZONA DE TRANSICIÓN $kr \sim 1$. Región de transición, la estructura de campo es complicada.

** En cualquiera de las zonas P es solo la que transporta los campos de radiación.

• Ejemplos cuestiones: Evoluciones de Jefimenko y campos de radiación

* Sea una corriente \vec{J} variable tal que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ podemos afirmar con seguridad...

- (a) No radia (b) No radia c. eléctricos (c) No radia c. magnéticos (d) Puede radior

Recordemos que los campos de radiación dados por Jefimenko son:

$$\vec{E}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times [\dot{\vec{J}}])}{R} dV'$$

$$\vec{B}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V'} \frac{[\dot{\vec{J}}] \cdot \hat{R}}{R} dV'$$

$\nabla \cdot \vec{J} = 0$ no hace cero los integrandos, luego no hay ningún motivo por el que no pueda radior. (d)

* Los campos de radiación guardan entre ellos y con la dirección una relación geométrica igual a...

- (a) un modo TE de una guía (b) un modo TM de una guía
(c) una onda plana (d) en el caso cuasiestático

Del y como hemos visto en teoría las relaciones son las mismas que con una onda plana. (c)

$$\vec{E}_{rad}(r \rightarrow \infty) = -c^2 \times \vec{B}_{rad}, \quad \vec{B}_{rad}(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E}_{rad}.$$

* Sea $[\vec{J}](\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t - R/c)$. El campo $\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\dot{\vec{J}}] \cdot \hat{R}}{R^2} dV'$ representa

- a) \vec{B} b) \vec{B}_{rad} c) $\vec{B} - \vec{B}_{rad}$ d) Nada de lo anterior

Recordemos la ecuación de Jefimenko para \vec{B}

$$\vec{B} = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{J}(\vec{r}', t')] \times \hat{R}}{R^2} dV'}_{\text{Expresión dado}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V'} \left[\frac{\partial [\vec{J}(\vec{r}', t')]}{\partial t'} \right] \times \frac{\hat{R}}{R} dV'}_{\vec{B}_{rad}}$$

luego B respecto a $\overline{B - B_{\text{red}}}$, (c).

5. Desarrollo multipolar de las fuentes

El objetivo de esta sección es el estudio de la ecuación escalar de ondas con fuentes en coordenadas esféricas, para campos monocromáticos.

Tampoco incluiré aquí los pasos de las deducciones (me parece que toman bastante tiempo y que lo relevante son las conclusiones).

En vez de trabajar con el campo eléctrico \vec{E} lo vamos a hacer con

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{i}{\omega \epsilon_0} \vec{J}$$

que por la ecuación de continuidad tiene divergencia nula. Planteando la ecuación de Helmholtz con fuentes para \vec{E}' , \vec{H} llegamos a unas ecuaciones de ondas inhomogéneas para los potenciales de Debye $\vec{r} \cdot \vec{E}'$, $\vec{r} \cdot \vec{H}$

$$(\nabla^2 + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{E}') = -\vec{r} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{J}$$

$$(\nabla^2 + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{H}) = -\vec{r} \cdot \nabla \times \vec{J}$$

Sabemos que la solución de $(\nabla^2 + k^2)\psi = -g$ viene dada por:

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{g e^{-ikr}}{R} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{[g]}{R} dV'$$

De esta forma:

$$\vec{r} \cdot \vec{E}' = -\frac{i}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{e^{-ikr}}{R} \vec{r}' \cdot \frac{\nabla' \times \nabla' \times \vec{J}}{\nabla'(\nabla' \cdot \vec{J}) - \nabla'^2 \vec{J}} dV'$$

$$\vec{r} \cdot \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{e^{-ikr}}{R} \vec{r}' \cdot \frac{\nabla' \times \vec{J}}{\nabla' \cdot (\vec{r}' \cdot \vec{J})} dV'$$

Fuera de V' $\vec{J} = 0$
luego $\vec{E} = \vec{E}'$ para
 $V_\infty - V'$

• Desarrollo multipolar de los fuentes

Procederemos ahora a expresar los potenciales de Debye como una combinación lineal de multipolos de la forma:

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{E}' &= \sum_{\ell, m} A_{\ell m}^{(\ell)} \vec{r} \cdot \vec{E}'_{\ell m}^{(\ell)} \\ \vec{r} \cdot \vec{H} &= \sum_{\ell, m} A_{\ell m}^{(m)} \vec{r} \cdot \vec{H}_{\ell m}^{(m)}\end{aligned}$$

Es importante señalar lo siguiente:

- $\{\vec{r} \cdot \vec{E}_{\ell m}^{(\ell)}\}, \{\vec{r} \cdot \vec{H}_{\ell m}^{(m)}\}$ son bases ortogonales, luego conforman un conjunto LI y

$$\vec{r} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow A_{\ell m}^{(\ell)} = 0 \quad \forall \ell, m$$

$$\vec{r} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow A_{\ell m}^{(m)} = 0 \quad \forall \ell, m$$

- Si $\rho = 0$ y $\vec{J}(\vec{r}') \perp \vec{r}' \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$ y $\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{J}) = 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow A_{\ell m}^{(\ell)} = 0 \quad \forall \ell, m$

En este caso el desarrollo multipolar solo contiene términos magnéticos. (*)

- Si $\vec{J}(\vec{r}') \parallel \vec{r}' \Rightarrow \vec{r}' \times \vec{J} = \vec{0} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow A_{\ell m}^{(m)} = 0 \quad \forall \ell, m$

En este caso el desarrollo multipolar solo contiene términos eléctricos. (*)

A partir de cierto teorema conocido como teorema de adición de las funciones de Hankel se pueden deducir (ver apuntes de Fundamentos o Góimil) que los coeficientes vienen dados por:

$$A_{\ell m}^{(\ell)} = -\frac{k^2}{e(\ell+1)\epsilon_0} \int_{V'} \vec{J} \cdot \vec{E}_{\ell m}^{*(\ell)} dV' \quad ; \quad A_{\ell m}^{(m)} = -\frac{k^2}{e(\ell+1)\epsilon_0} \int_{V'} \vec{J} \cdot \vec{E}_{\ell m}^{*(m)} dV'$$

$I \equiv$ interior. Según Pot. Coulomb $\Rightarrow R_{\ell}^* = j_{\ell}$

(*) Demostrado formalmente en B4-6

De forma general los campos vendrán dados por

$$\vec{E} = \sum_{e,n} (A_{en}^{(e)} \vec{E}_{en}^{(e)} + A_{en}^{(n)} \vec{E}_{en}^{(n)})$$

$$\vec{H} = \sum_{e,n} (A_{en}^{(e)} \vec{H}_{en}^{(e)} + A_{en}^{(n)} \vec{H}_{en}^{(n)})$$

En los coeficientes A_{en} introduciremos los siguientes ${}_I \vec{E}_{en}^{(e)}, {}_I \vec{E}_{en}^{(n)}$:

$${}_I \vec{E}_{en}^{(e)*} = -\frac{z_0}{kr} \left[\hat{r} l(l+1) j_e(kr) Y_{en}(\theta, \phi) + \frac{d}{dr} (r j_e(kr)) r \nabla Y_{en}(\theta, \phi) \right]$$

$${}_I \vec{E}_{en}^{(n)*} = -i z_0 j_e(kr) \vec{r} \times \nabla Y_{en}(\theta, \phi)$$

Esto es, \vec{E}_{en} pero con $R_e^* = j_e(kr)$

I : Índice que usamos la función de Bessel entera $j_e(kr)$.

Algunos resultados interesantes mencionados en clase sobre esta sección se mencionan a continuación:

- Recordemos que $Y_{en}(\theta, \phi) = P_e^n(\theta) e^{im\phi}$. Si el problema presenta simetría en ϕ debe verificarse que $m=0$.
- $\vec{r} \cdot \vec{E}_{en} \propto R_e^* Y_{en}^*$; $\vec{r} \cdot \vec{H}_{en} \propto R_e^* Y_{en}^*$. Para ondas que viajan "hacia el exterior" $R_e^* = h_e^{(2)}(kr)$ y "para el interior" $R_e^* = h_e^{(1)}(kr)$. Además $h_e^{(2)}(kr)$ y Y_{en}^* son ortogonales.
- Fuera de la zona de las fuentes $\rho=0$ y así $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}'(\vec{r}, t) \quad \forall \vec{r} \in \{\mathbb{R}^3 - V\} \quad \forall t$.

• Energía y momento angular radiados por multipolos

Para calcular la potencia radiada integramos el promedio temporal del vector de Poynting:

$$P = \frac{1}{2} \mu_0 \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{\sigma}$$

El "multipolo unidad" que no depende de m radia una potencia

$$P = \frac{2_0}{2k^2} \ell(\ell+1)$$

* Nótese que un monopolo ($\ell=0$) no radia potencia. En general, la potencia radiada por una distribución de fuentes viene dada por:

$$P = \frac{2_0}{2k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \ell(\ell+1) (|A_{\ell m}^{(E)}|^2 + |A_{\ell m}^{(M)}|^2)$$

El momento angular radiado se obtiene a partir del Teorema de Conservación del momento angular:

$$\frac{dL}{dt} = \oint_S \vec{r} \times \vec{T} \cdot \hat{n} da = - \oint_S \vec{r} \times [\epsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \otimes \vec{H}]$$

De aquí se deduce que el multipolo unidad radia una momento angular:

$$\frac{dL}{dt} = \hat{z} \frac{2_0}{2k^2} \frac{m}{\omega} \ell(\ell+1)$$

Obsérvese además que:

$$\left\langle \frac{dL_z}{dt} \right\rangle = \frac{m}{\omega} P_{\ell}$$

y que un multipolo con $m=0$ no radia momento angular.

• Ejemplos cuestiones: Desarrollo multipolar

* Sea una antena de dipolo recto delgado de longitud λ . ¿Qué tipos de campos multipolares genera?

- (a) Eléctricos (b) Magnéticos (c) Los dos (d) Depende de la frecuencia

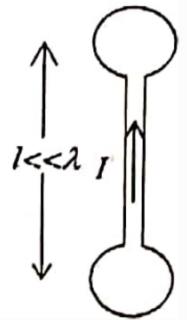
Si la antena está orientada en el eje z , $\vec{r}' = z'\hat{z}'$ y $\vec{J} = J\hat{z}$. Se trata de uno de los casos presentados en teoría:

"Si $\vec{J} \parallel \vec{r}' \Rightarrow \vec{r}' \times \vec{J} = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}' \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow A_{em}^{(m)} = 0 \forall l, m$ En este caso el desarrollo multipolar solo contiene términos eléctricos."

Con lo que efectivamente $A_{em}^{(m)} = 0$ y será un campo multipolar eléctrico. (c)

* Sobre la siguiente antena, ¿qué afirmación es verdadera? \rightarrow

- (a) Es isotrópica (b) Tiene la máxima eficiencia posible técnicamente
(c) No radia momento angular (d) No radia \vec{B}

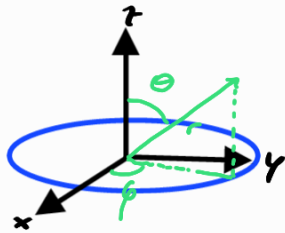


El dibujo es un poco tramposo porque parece no dar información, pero el caso es que tiene simetría azimutal (no hay dependencia en φ) lo que como hemos visto en teoría implica que $m=0$ ($Y_l^{m=0}(\theta, \varphi)$) para que los armónicos no dependan de φ . Si $m=0$ por la teoría $dL/dt=0$ y no radia momento angular.

• Ejemplo: Desarrollo multipolar

Obtener los campos y la potencia que radia un espiral de radio a con $\omega \ll c$ si conduce una corriente alterna de la forma $I = I_0 e^{i\omega t} \hat{\phi}$.

Nota: Hay signos y constantes que no me coinciden con los del Prof. Fordebo y lo con el Prof. Castro. No obstante, creo que el procedimiento general es correcto, por lo que dejo aqui el ejercicio.



Lo primero que podemos apreciar es que el problema presenta simetria azimutal entonces $m=0$

Además, suponiendo el hilo descargado $\rho=0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J}=0$ y además $\vec{J}(r) \perp \vec{r}'$ pues $\vec{J} \sim \hat{\phi}$, $\vec{r} \sim \hat{\rho}$ entonces tal y como hemos visto anteriormente $A_{em}^{(E)} = 0 \forall l, m$ y solo tendremos terminos magnéticos $k_a \ll 1$ con $k = \omega/c$ nos permite tomar solo $l=1$.

Entonces:

$$\vec{E}_{em}^{(M)*} = -i Z_0 j_e(kr) \vec{r} \times \nabla \chi_{em}$$

Recordando que solo nos interesa $l=1, m=0$:

$$\chi_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta' \Rightarrow \nabla \chi_{10} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\sin\theta'}{r} \hat{\theta} \quad (\text{gradiente en esféricas})$$

$$\vec{r} \times \nabla \chi_{10} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta' \hat{\phi}$$

Para $k_a \ll 1$ la función esférica de Bessel puede aproximarse por $j_e(k_a) \sim \frac{(k_a)^e}{(2e+1)!!}$ esto es, $j_1 \sim \frac{k_a}{3}$. Así nos queda:

$$\vec{E}_{30}^{(M)*} = -i Z_0 \frac{k_a}{3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta' \hat{\phi}$$

Introduciendo estos resultados en $A_{10}^{(m)}$:

$$A_{10}^{(m)} = -\frac{k^2}{2\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{E}_{em}^{(m)}}{r'} dV' = -\frac{k^2}{2\epsilon_0} \int_{\mathcal{P}} \hat{r} \cdot \frac{Ka}{3} (-i\epsilon_0) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \hat{r} d\ell =$$

donde se ha tenido en cuenta que toda la fuente se haya en $\theta' = \frac{\pi}{2}$ $r' = a$

$$A_{10}^{(m)} = i \frac{k^2 I}{6} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a \int_0^{2\pi} a d\phi = i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{I \pi a^2}{3} k^3$$

Definiendo el momento dipolar como $m \equiv I \pi a^2$ resulta

$$A_{10}^{(m)} = i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{m k^3}{3}. \quad \text{Ahora toca obtener los campos. Recordemos del Tema 2 que}$$

$$\vec{E}_{em}^{(m)} = i 2_0 h_e^{(l)}(kr) (\vec{r} \times \nabla \chi_{lm}^*) \quad \text{entonces como } l=1 :$$

$$\vec{E}_{10}^{(m)} = i 2_0 h_1^{(1)}(kr) \vec{r} \times \nabla \chi_{10} \quad \leftarrow \chi_{10}^* = \chi_{10}$$

$$= i 2_0 \left[-\frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) \right] \left[-\hat{\phi} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \right]$$

El campo eléctrico será entonces:

$$\vec{E} = A_{10}^{(m)} \vec{E}_{10}^{(m)} = i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{m}{3} k^3 i 2_0 \left[-\frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) \right] \left[-\hat{\phi} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \right]$$

$$= \frac{m k^3}{2\pi} 2_0 i^2 \frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) \sin\theta \hat{\phi}$$

Por otro lado:

$$\vec{H}_{em}^{(m)} = \frac{1}{kr} \left[\hat{r} l(l+1) h_e \chi_{lm}^* + \frac{d}{dr} (r h_e^{(l)}(kr)) r \nabla \chi_{lm}^* \right]$$

$$\vec{H}_{10}^{(m)} = \frac{1}{kr} \left[\hat{r} 2 h_1^{(1)}(kr) \chi_{10} + \frac{d}{dr} (r h_1^{(1)}(kr)) r \nabla \chi_{10} \right] =$$

$$= \frac{1}{kr} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left[-\hat{r} e^{-ikr} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) 2 \cos\theta + \hat{\theta} i e^{-ikr} \left[1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin\theta \right]$$

y obtendremos $\vec{H} = i m k^3 \frac{1}{kr} \frac{1}{4\pi} \left[-\hat{r} \frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) 2 \cos\theta + \hat{\theta} i e^{-ikr} \left[1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin\theta \right]$

de potencia se obtiene a partir de:

$$P = \frac{z_0}{2k^1} \sum_{\substack{\ell, m \\ \ell=1 \\ m=0}}^{\ell(\ell+1)} [|A_m^{(\ell)}|^2 + |A_{-m}^{(\ell)}|^2] = \frac{z_0}{2k^2} 2 \left| i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{mk^3}{3} \right|^2 = \frac{z_0 m^2 k^4}{12\pi}$$

—

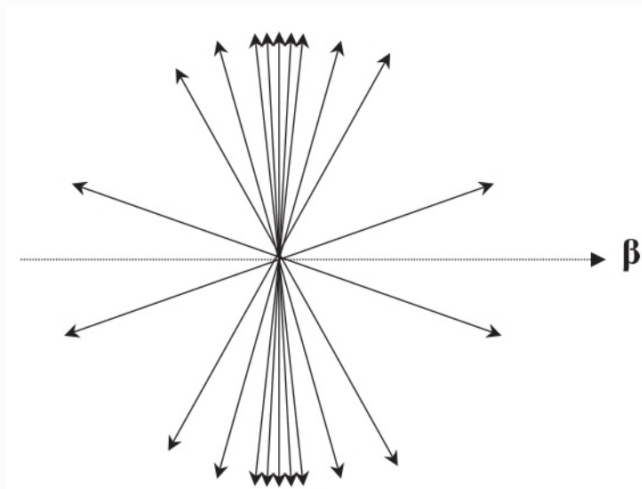
Electrodinámica Clásica

TEMA 5-6

Potenciales Electromagnéticos

y

Campos de fuentes puntuales



Alberte Xosé López Feire

1. Potenciales Electromagnéticos

Por el Teorema de Helmholtz, y como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ sabemos que existirá una función vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ denominada **potencial vectorial** tal que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Introduciendo esta expresión en la Ley de Faraday $\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$ luego existirá una función escalar $\phi(\vec{r}, t)$ denominada **potencial escalar** tal que

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Si ahora expresamos \vec{E}, \vec{B} en las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en términos de los potenciales:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

y como $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$ resultan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Estas ecuaciones no son muy solubles: son complicadas (de orden 2 en 4 variables) y los potenciales se hacen parámetros conjuntamente en ambas ecuaciones. Para facilitar su resolución contamos con una famosa propiedad de los potenciales: la invariancia gauge.

• Invarianza Gauge

Hagámonos ahora la siguiente pregunta: dados unos campos \vec{E}, \vec{B} , ¿cuántos potenciales existen que den lugar a esos mismos campos? ¿Están unívocamente definidos?

Para analizar esto consideremos que $\exists \phi, \vec{A}; \phi', \vec{A}'$ parejas de potenciales tales que den lugar a los mismos campos

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = \vec{E}'$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}' = \vec{B}'$$

Podemos relacionar ambos potenciales mediante dos funciones $\alpha(\vec{r}, t), \beta(\vec{r}, t)$:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}$$

$$\phi' = \phi + \beta$$

Como por hipótesis ambos pares deben dar lugar a los mismos campos:

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{\alpha} = \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \nabla \times \vec{\alpha} = \vec{0}$$

Esto es, $\vec{\alpha}(\vec{r}, t)$ debe de ser necesariamente irrotacional, y por lo tanto conservativo: $\exists \lambda(\vec{r}, t) / \vec{\alpha} = \nabla\lambda$. Haciendo lo mismo para \vec{E}' :

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\phi - \nabla\beta - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial t} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E};$$

$$\nabla\beta + \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial t} = \vec{0}$$

y como $\vec{\alpha} = \nabla\lambda$:

$$\nabla\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow \beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + k(t) \Rightarrow \beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

Notare que si bien hemos incorporado $k(t)$ a $d(\vec{r}, t)$ esto no afecta a \vec{a} pues

$$\vec{a} = \nabla d = \nabla \vec{d} \quad \text{debido que} \quad \nabla k(t) = \vec{0}.$$

En conclusión sea $d = d(\vec{r}, t)$ una función escalar diferenciable que denominaremos

función gauge, y sean $\vec{A}(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}, t)$ potenciales electromagnéticos que

dan lugar a unos campos \vec{E}, \vec{B} . Entonces los siguientes potenciales

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla d \\ \phi &= \phi - \frac{\partial d}{\partial t} \end{aligned}$$

dan lugar a los mismos campos. Estas transformaciones se denominan transformaciones

de Gauge y se dice que las ecuaciones de Maxwell son invariantes Gauge

pues son independientes de la función d elegida.

Gracias a que los potenciales no son únicos (existen infinitos que dan lugar a los mismos campos) podemos imponer ciertas condiciones (GAUGES) a estos y encontraremos siempre potenciales que los verifiquen.

• Gauge de Coulomb

Sea la condición adicional exigida a los potenciales conocida como gauge de

Coulomb:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Podríamos preguntarnos si realmente las transformaciones de Gauge nos permiten encontrar siempre potenciales que los cumplan. Imaginemos que \vec{A}' no cumple el gauge

En ese caso:

$$\nabla \cdot \vec{A}' = g(\vec{r}, t)$$

Por las transformaciones de gauge:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \lambda = g(\vec{r}, t)$$

Queremos que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Para ello $\nabla^2 \lambda = g(\vec{r}, t)$. Como λ únicamente debe de ser diferenciable si $g(\vec{r}, t)$ es bien comportado siempre $\exists \lambda / \nabla^2 \lambda = g(\vec{r}, t)$.

Ahora, ¿nos ayuda en algo este Gauge? Impongámoslo en las ecuaciones del inicio:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho_v / \epsilon_0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Resultará así:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_c = -\rho_v / \epsilon_0 \\ \nabla^2 \vec{A}_c - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_c}{\partial t^2} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial \phi_c}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

de ventaja de este Gauge radica en que la ecuación del potencial escalar es la ecuación de Poisson con lo que...

$$\phi_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_v(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

¡el mismo potencial que en Electroestática! Nótese que este potencial es "instantáneo" pues no tiene ningún tiempo retardado. No obstante como ϕ no es una magnitud física medible esto no contradice los postulados de la Relatividad (véase Griffiths para más información).

la ecuación del potencial vectorial ya es más complicada. Descompondremos la densidad de corriente en dos términos:

$$\vec{J} = \vec{J}_e + \vec{J}_t \quad \begin{cases} \nabla \times \vec{J}_e = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{J}_t = 0 \end{cases}$$

Veamos además que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{\downarrow}{=} -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{J}_e$$

y así,

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J}_e + \nabla \chi \quad \text{donde} \quad \nabla^2 \chi = 0 \quad \text{. Tomamos} \quad \chi = 0$$

Además

$$\nabla \times \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \vec{J}_e = \vec{0}$$

Resultados al final:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A}_e - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J}_e \\ \nabla^2 \phi_c &= -\rho / \epsilon_0 \end{aligned}$$

• Gauge de Lorentz

Otro posible gauge es el gauge de Lorentz:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

que nos resultará muy útil, porque a partir de este potencial vemos que

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho/\epsilon_0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

y así:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_L - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = -\frac{\rho_L}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A}_L - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_L}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

que son las ecuaciones de ondas inhomogéneas para los potenciales.

Las soluciones de estas ecuaciones son los POTENCIALES RETARDADOS:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{[\rho]}{R} dV' \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{J}]}{R} dV' \end{aligned}$$

Ejemplos cuestiones: Potenciales Electromagnéticos

* Un cambio de gauge mantiene la condición de Coulomb si:

$$(a) \nabla^2 \lambda = 0 \quad (b) \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (c) c^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = 0$$

Sea el gauge de Coulomb: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Cambiamos de gauge: $\nabla \cdot (\vec{A} + \nabla \lambda) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \lambda$

Se mantendrá la condición si $\nabla^2 \lambda = 0$. (a)

* Dado ρ pt. escalar y \vec{J} densidad de corriente, están determinados:

$$(a) \vec{E} \text{ y } \vec{B} \quad (b) \text{ solo } \vec{E} \quad (c) \text{ solo } \vec{B} \quad (d) \text{ ninguno de ellos.}$$

Supongamos que antes trabajábamos en el gauge de Lorentz. En este caso:

$$\vec{A}_L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{J}]}{R} dV'$$

con lo que sabemos el potencial vectorial y de ahí $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}_L + \nabla \times \nabla \lambda$. Sin embargo

$$\vec{E} = -\nabla \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}_L + \nabla \lambda): \text{ Depende de } \lambda \text{ luego no está determinado: (c).}$$

* Sean ϕ, \vec{A} los potenciales electromagnéticos, y \vec{E}, \vec{B} los campos eléctrico y magnético respectivamente. En una transformación gauge...

- (a) Cambian los potenciales pero no los campos
- (b) Cambian los campos pero no los potenciales
- (c) Solo cambian ciertas componentes de los campos.
- (d) Pueden cambiar ambos

Del y como se evolucionó en teoría una transformación gauge es aquella que permite transformar los potenciales dando lugar a los mismos campos. (a)

2. Cargas puntuales

Definiremos una carga puntual como una carga q distribuida según $\rho \equiv \rho(\vec{r}')$ cuyo expresión desconocemos pero que verifica $\rho = 0$ para una distancia $S \ll R$ alrededor de un punto que se considere la posición de la partícula. La densidad de carga y la densidad de corriente de una partícula puntual pueden escribirse como:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) \quad \vec{J} = q \vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t))$$

3. Potenciales de Liénard-Wiechert

Estudiemos ahora los potenciales electromagnéticos creados por una carga en movimiento. Trabajando en el gauge de Lorentz sabemos que la solución a las ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales son los potenciales retardados:

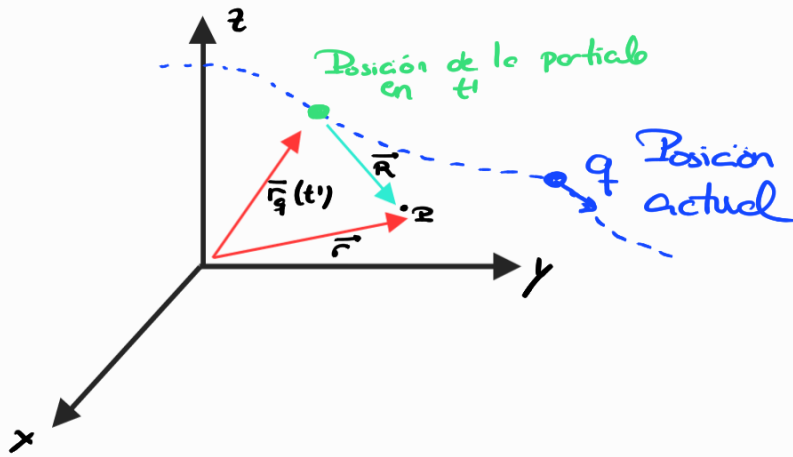
$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\sigma' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R]} \int_{V'} [\delta(\vec{R})] d\sigma'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\sigma' = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{u}}{[R]} \int_{V'} [\delta(\vec{R})] d\sigma'$$

donde $[S(\vec{R})] = \delta(\vec{r} - \vec{q}(t'))$. Estos integrales son más complicados de lo que parecen debido a que la densidad de carga que entra en la integral está dada en tiempos distintos, pues t' depende de \vec{r}

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

y así, en general, $\int_{V'} [\rho] dV' \neq q$.



Puede ser interesante notar que como mucho un punto de la trayectoria puede influir a otro punto \vec{r} en un cierto instante t . Demostremos esto considerando que existen dos puntos separados distancias R_1, R_2 del punto r en cuestión, tales que $R_1 = c(t - t_1)$, $R_2 = c(t - t_2)$ donde t_1, t_2 son sus tiempos retardados. Entonces $R_1 - R_2 = c(t_1 - t_2) \Rightarrow$

$(r - r_q^{(1)}) - (r - r_q^{(2)}) = c(t_1 - t_2) \Rightarrow c = \frac{r_q^{(2)} - r_q^{(1)}}{t_2 - t_1} = v$. Como la velocidad de la partícula no puede ser c está claro que los puntos deben de ser el mismo.

Operando con los integrales anteriores se llegan a unas expresiones mucho más sencillas para los potenciales electromagnéticos creados por una carga puntual en movimiento, los **POTENCIALES DE LIÉNARD-WIECHERT**

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R] - \frac{[\vec{u} \cdot \vec{R}]}{c}}$$
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{u}]}{[R] - \frac{[\vec{u} \cdot \vec{R}]}{c}} = \frac{[\vec{u}]}{c^2} \phi$$

Habitualmente escribiremos, por simplificar, $s \equiv [R] - \frac{[\vec{u} \cdot \vec{R}]}{c}$. Importante señalar que suponemos que toda la distribución de carga se mueve con la misma velocidad (suponemos la distribución indeformable).^(*)

(*) Esto fue una cuestión de Julio-2019.

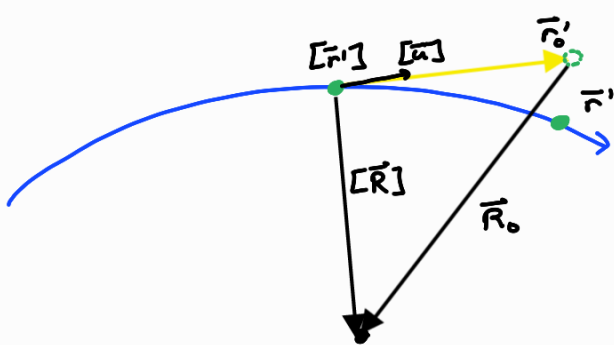
4. Campo electromagnético creado por una carga en movimiento.

A partir de los potenciales de Lienard-Wiechert podemos deducir los campos eléctrico y magnético que crea una partícula con un movimiento cualquiera:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{R}_0}{r^2 s^3} + \frac{[\vec{R}] \times (\vec{R}_0 \times [\dot{\vec{u}}])}{c^2 s^3} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [\dot{\vec{R}}] \times \vec{E}$$

donde $\vec{R}_0 \equiv \vec{r} - \vec{r}'_0 = [\vec{R}] - [\vec{u}] \frac{[\vec{R}]}{c}$. \vec{r}'_0 es la posición virtual de la partícula, esto es, la posición que tendría en el instante t si se hubiese desplazado desde la posición que ocupaba en t' con la velocidad que tenía en ese instante, $[\vec{u}]$; y $s \equiv [\vec{R}] - \frac{[\vec{u} \cdot \vec{R}]}{c}$.



El punto \vec{r}'_0 es la posición en la que estaría la partícula si se siguiera moviendo en velocidad $[\vec{u}]$ desde $t' = t - \frac{[\vec{R}]}{c}$.

Si la velocidad de la partícula es constante estas expresiones se vuelven más sencillas:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{r^2 s^3} \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{u} \times \vec{E}$$

Si situamos el origen del sistema de coordenadas en la partícula cargada:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2 s^3}$$

Se puede demostrar que $s = [R] - \frac{[\vec{u} \cdot \vec{R}]}{c}$ se puede expresar en función de \vec{R} de la forma que sigue:

$$s = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) R^2 + \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{c}\right)^2$$

Entonces $s^2 = R^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} (1 - \cos^2\theta)\right) = R^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2\theta\right)$ y así:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^{3/2}} \frac{\hat{R}}{R}$$

El campo \vec{E} es entonces radial, y a medida que aumenta la velocidad se vuelve más transversal al movimiento. Además, debido a que $\vec{E} \sim \hat{r}$ la partícula no irradia energía, porque la integral de su vector de Poynting en una superficie esférica centrada en ella es nula.

Por otro lado el campo magnético resultante

$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{u \sin\theta}{r^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2\theta\right)} \hat{\phi}$$

En el Griffiths podemos encontrar las siguientes imágenes, que nos pueden ayudar a hacernos una idea de la forma del campo.

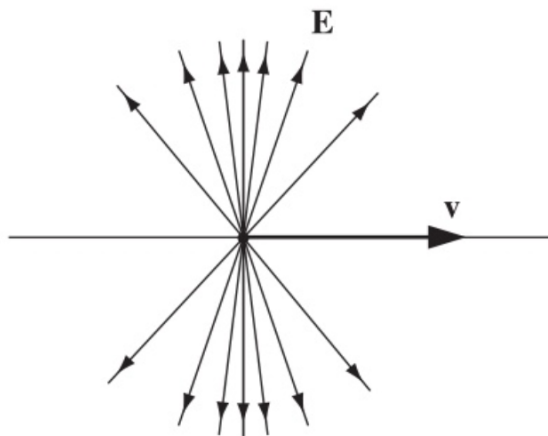
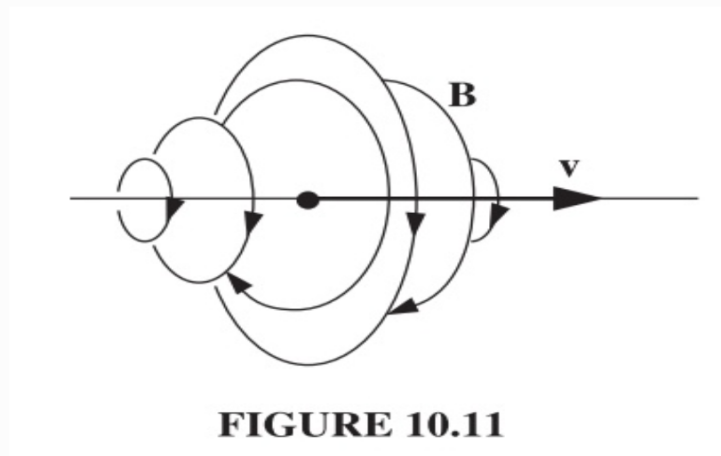


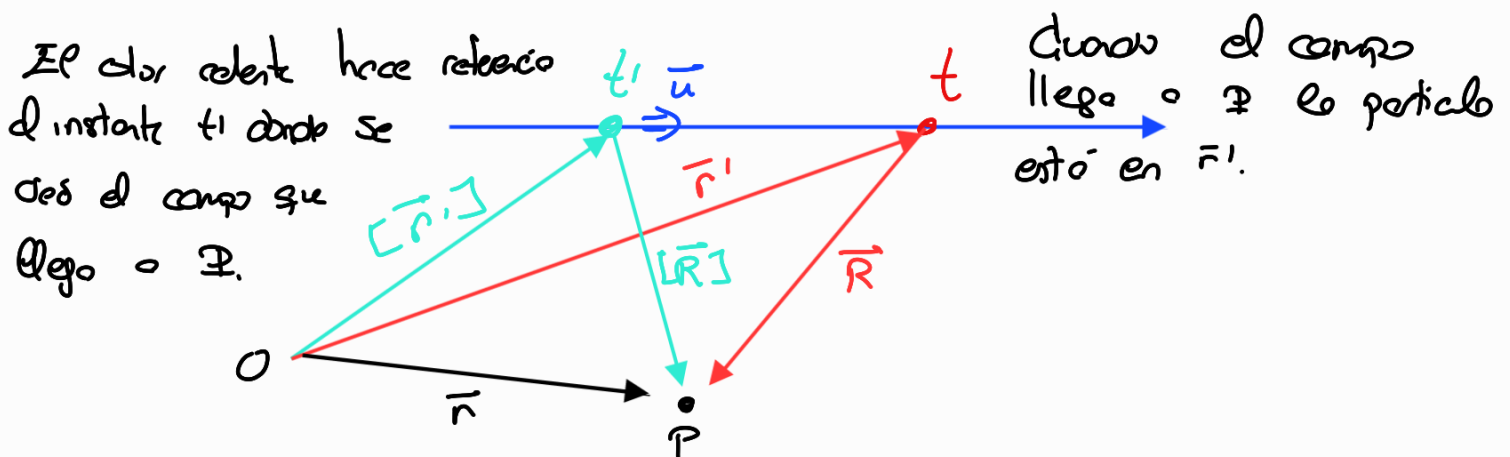
FIGURE 10.10



Además, como era de esperar, los campos \vec{E}, \vec{B} tienden a los estáticos si $\vec{u} \rightarrow \vec{0}$:

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad \vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^2} (\vec{u} \times \hat{r})$$

En general para este tipo de cuestiones/problemas resultará conveniente hacer un esquema con los vectores. Véase por ejemplo este, que usaré en las cuestiones para tratar el campo de una partícula con $\vec{u} = c\vec{e}_x$.



* Importante no confundir el significado de la prima. En el tiempo t' hace referencia al tiempo retardado $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$. En \vec{r}' señalamos la posición de la fuente en el instante. En t' la partícula se haya en $[r']$

5. Campos de radiación

Hemos obtenido los campos eléctrico y magnético creados por una partícula en movimiento. Estas expresiones pueden considerarse como suma de dos términos: los campos de velocidad, que dependen únicamente de u , y los campos de aceleración, o campos de radiación, que dependen de \dot{u} :

$$\begin{cases} \vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{s^3} [\vec{R}] \times (\vec{R}_0 \times [\dot{u}]) \\ \vec{B}_{\text{rad}} = \frac{1}{c} [\hat{R}] \times \vec{E}_{\text{rad}} \end{cases}$$

Estos campos son perpendiculares entre sí, a $[\vec{R}]$, cumplen $E=cB$ y varían con $1/R$.

Podemos obtener el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_{\text{rad}} \times \vec{B}_{\text{rad}} = \epsilon_0 c [\hat{R}] E_{\text{rad}}^2$$

Entonces:

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 c^3} \frac{[\hat{R}]}{s^2} |[\bar{R}] \times ([\bar{R}_0] \times [\ddot{u}])|^2$$

Obtenemos la energía perdida por la partícula a partir del vector de Poynting:

$$\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{\omega} = -\frac{dU}{dt} = \oint_S \vec{S} \cdot [\hat{R}][R]^2 d\Omega \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{S} &= \frac{[\hat{R}]}{[R]^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dU}{d\Omega} \right) = \frac{[\hat{R}]}{[R]^2} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{d}{dt'} \left(\frac{dU}{d\Omega} \right) = \\ &= \frac{[\hat{R}]}{[R]} \frac{1}{s} \frac{d}{dt'} \left(\frac{dU}{d\Omega} \right) \end{aligned}$$

y,

$$\frac{d}{dt'} \left(\frac{dU}{d\Omega} \right) = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{[R]}{s^3} \left\{ [\hat{R}] \times (\bar{R}_0 \times [\ddot{u}]) \right\}^2$$

Esto nos muestra que existen dos direcciones, contenidos en el plano $[\bar{u} \times \dot{\bar{u}}]$ en los que no se irradia energía: las direcciones nodales.

$$\begin{aligned} \bar{R}_0 \times [\dot{\bar{u}}] = 0 &\Rightarrow [\hat{R} \times \dot{\bar{u}}] = \frac{1}{c} [\bar{u} \times \dot{\bar{u}}] \\ (\bar{R}_0 \parallel [\dot{\bar{u}}]) \end{aligned}$$

Así, si expresamos los ángulos con respecto a la aceleración, las direcciones nodales son:

$$\sin \Theta_{1,2} = \frac{v}{c} \sin \alpha$$

donde $\alpha \equiv \hat{u} \hat{u}$

La potencia radiada total se puede obtener integrando sobre todo el ángulo sólido:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{rad}}}{dt'} &= \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 \left\{ [\ddot{u}] - \left(\frac{[u \times \dot{u}]}{c} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left\{ \gamma^6 [\dot{u}_{\parallel}]^2 + \gamma^4 [\ddot{u}]^2 \right\} \end{aligned}$$

que es lo conocido como **fórmula de Liénard**

• Radiación a bajas velocidades

En el caso de que $v \ll c$ las expresiones con las que hemos estado trabajando se simplifican notablemente pues

$$R_0 \approx R \quad s \approx R$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{\text{rad}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^2} \vec{R} + (\vec{R} \times (\vec{R} \times [\ddot{u}])) \\ \vec{B}_{\text{rad}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^2} [\ddot{u}] \times \vec{R} \end{aligned} \right\} \vec{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{[\ddot{u}]^2 \sin^2 \Theta}{R^2} \hat{R}$$

Si integramos el vector de Poynting en una esfera de radio R obtendremos la potencia:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} q^2 c^3 [\ddot{u}]^2$$

expresión que se conoce como **FÓRMULA DE LARMOR** (notese que solo es válida a bajas velocidades)

• Aceleración paralela a la velocidad

Si $[\ddot{u}] \parallel [\dot{u}]$.

$$\vec{R}_0 \times [\ddot{u}] = ([\vec{R}] - [\dot{u}] \frac{[R]}{c}) \times [\ddot{u}] = [\vec{R}] \times [\ddot{u}] = [\vec{R} \times \ddot{u}]$$

Entonces:

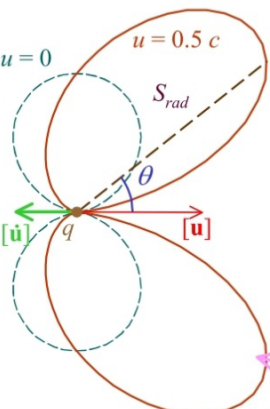
$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^1} \frac{1}{s^2} [\vec{R}] \times (\vec{R}_0 \times [\dot{u}]) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^1} \frac{1}{s^2} [\vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{u})]$$

$$\vec{B}_{rad} = \frac{q [\vec{R}]}{4\pi\epsilon_0 c^3 s^2} [\dot{u} \times \vec{R}]$$

y el vector de Poynting resultará:

$$\vec{S}_{rad} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{[R]}{s}\right)^4 \frac{[\dot{u}] \sin^2 \theta}{s^2} [\hat{R}]$$

Radiación de frenado



$[\dot{u}] \parallel [\mathbf{u}] \Rightarrow \mathbf{R}_0 \times [\dot{u}] = [\mathbf{R} \times \dot{u}]$

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} [\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \dot{u})]$$

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{q [\mathbf{R}]}{4\pi\epsilon_0 c^3 s^3} [\dot{u} \times \mathbf{R}]$$

$$\frac{1}{1 - \beta \cos \theta}$$

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{[\hat{\mathbf{R}}]}{[R]^2} \left(\frac{[R]}{s}\right)^6 [\dot{u}]^2 \sin^2 \theta$$

Lóbulo adelantado e reforzado

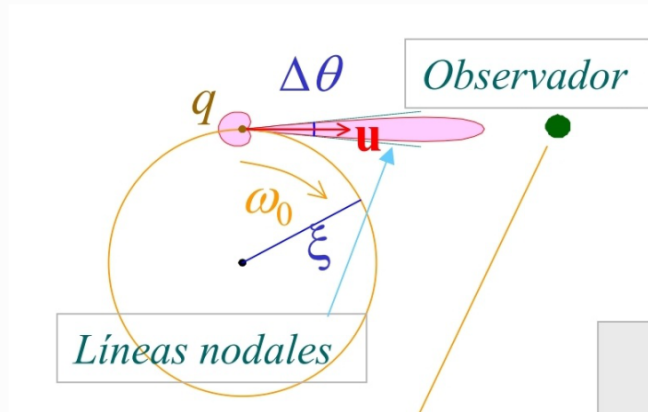
$$\left. \begin{array}{l} u \ll c \\ \mathbf{u} \approx \dot{\mathbf{u}} \tau \end{array} \right\} \frac{dU_{rad}}{d\omega} = 4\pi\epsilon_0 c \oint_S |E(\omega)|^2 da = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\Delta u}{c}\right)^2$$

$\hbar\omega_{m\acute{a}x} \leq \mathcal{E}_c$

Espectro limitado

• Aceleración perpendicular a la velocidad

Supóngase ahora que $[\vec{a}] \perp [\vec{u}]$, estando el movimiento dado por una rotación en torno a un punto \vec{r}_0 y radio de giro $\vec{\rho}$ verificándose $\vec{u} = \vec{\omega}_0 \times \vec{\rho}$



Considerando $\vec{\omega}_0 = 0$ (velocidad tangencial nula) a velocidades ultrarelativistas se verifica que el ángulo entre la línea nodales forma un $[\vec{u}]$ ángulo

$$\Delta\theta = u/c$$

concentrándose entonces la radiación en un lóbulo delgado en la dirección de $[\vec{a}]$

La partícula emite en una dirección dada un impulso de campo en dirección:

$$\Delta t' \approx 2 \frac{\Delta\theta}{\omega_0} \approx \frac{2}{\omega_0 \gamma}$$

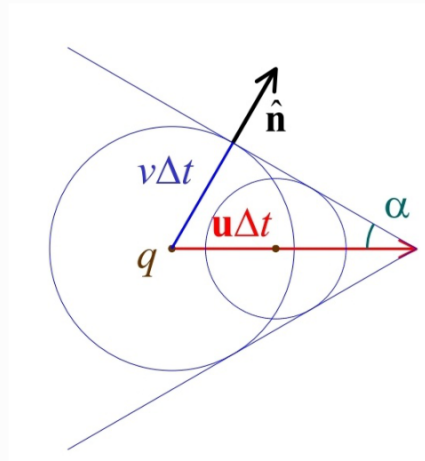
Para un observador en el plano:

$$\Delta t \approx \frac{R}{c} \Delta t' \approx \left(1 - \frac{u}{c}\right) \frac{2}{\omega_0 \gamma} \approx \frac{1}{\omega_0 \gamma^2}$$

• Radiación de Cerenkov

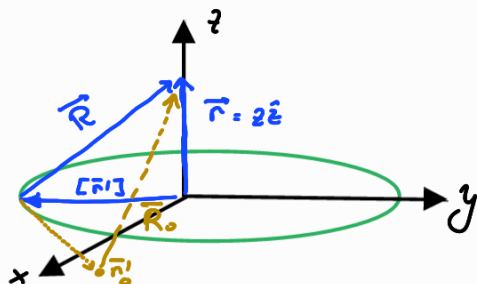
Aunque ya hemos visto que una carga en el vacío con velocidad constante no radia, sí puede haber radiación si esto se haya en un medio donde la velocidad del campo v sea menor que c si podrá haber una cierta radiación, conocido como **RADIACIÓN**

CERENKOV.



EJEMPLOS PROBLEMAS

* Calcular, en el eje de una circunferencia, los campos producidos por una carga moviéndose en velocidad constante a lo largo de la circunferencia.



Esencialmente tenemos que tomar las ecuaciones

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{R}_0}{r^2 s^3} + \frac{[\vec{R}] \times (\vec{R}_0 \times [\dot{\vec{u}}])}{c^2 s^3} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [\dot{\vec{R}}] \times \vec{E}$$

y sustituir las expresiones para este caso concreto. Recordemos que $s = [R] - \frac{[\vec{R} - \vec{u}]}{c}$

$$y \quad \vec{R}_0 = [\vec{R}] - [\vec{u}] \frac{c\hat{z}}{c}$$

Comencemos por los vectores de posición:

$$\vec{r} = z\hat{z} \quad \vec{r}' = a\hat{\rho}' = a(\cos\omega t\hat{x} + \sin\omega t\hat{y})$$

Tomamos $\rho' = \omega t \Rightarrow [\rho'] = \omega t' = \omega(t - \frac{[R]}{c})$

$$[\vec{r}'] = a(\underbrace{\cos[\rho']\hat{x} + \sin[\rho']\hat{y}}_{\equiv [\hat{\rho}]})$$

Entonces $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - a\hat{\rho}' \quad R = |\vec{R}| = \sqrt{z^2 + a^2} = [R]$

$$[\vec{R}] = [\vec{r}] - [\vec{r}'] = z\hat{z} - c[\hat{\rho}']$$

$$s = [R] - \frac{[\vec{u} \cdot \vec{R}]}{c} = R$$

$$\text{Así } [\dot{\vec{u}}] = a \frac{d[\hat{\rho}']}{dt'} = \omega a (-\sin[\phi'] \hat{x} + \cos[\phi'] \hat{y}) = \omega a [\hat{\phi}']$$

$$[\ddot{\vec{u}}] = \frac{d}{dt'} (\omega a (-\sin[\phi'] \hat{x} + \cos[\phi'] \hat{y})) = \omega^2 a (\cos[\phi'] \hat{x} - \sin[\phi'] \hat{y}) = -\omega^2 a [\hat{\rho}']$$

$$\vec{R}_0 = [\vec{R}] - [\vec{u}] \frac{c}{c} = z\hat{z} - [\hat{\rho}']a - [\hat{\phi}'] \frac{\omega a}{c} R$$

Para obtener el campo necesitamos los siguientes productos

$$\begin{aligned} \vec{R}_0 \times [\ddot{\vec{u}}] &= (z\hat{z} - [\hat{\rho}']a - [\hat{\phi}'] \frac{\omega a}{c} R) \times (-\omega^2 a [\hat{\rho}']) = \\ &= -\omega^2 a z [\hat{\phi}'] - \frac{\omega^3 a^2}{c} R \hat{z} \end{aligned}$$

donde he aplicado $\hat{\rho}' \times \hat{z} = \hat{\phi}'$ y $\hat{z} \times \hat{\rho}' = -\hat{\phi}'$.

$$\begin{aligned} [\vec{R}] \times (\vec{R}_0 \cdot [\ddot{\vec{u}}]) &= (z\hat{z} - c[\hat{\rho}']) \times (-\omega^2 a z [\hat{\phi}'] - \frac{\omega^3 a^2}{c} R \hat{z}) = \\ &= -\frac{\omega^3 a^3 R}{c} [\hat{\phi}'] + \omega^2 a z^2 [\hat{\rho}'] + \omega^2 a z \hat{z} \end{aligned}$$

$$s = [R] - \frac{[\vec{R} - \vec{u}]}{c} = R - \frac{1}{c}$$

Campo de velocidades.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{R}_0}{r^2 s^3} + \frac{[\vec{R}] \times (\vec{R}_0 \times [\ddot{\vec{u}}])}{c^2 s^3} \right]$$

$$\vec{E}_{\text{vel}} \Big|_{\rho=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\hat{z} - [\hat{\rho}']a - [\hat{\phi}'] \frac{\omega a}{c} (z^2 + a^2)^{1/2}}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \underbrace{\left(1 - \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2 \right)}_{\gamma^2}$$

$\frac{z^2 + a^2}{s^2 \cdot R^2}$

Campo de aceleración

$$\vec{E}_{\text{acc}} \Big|_{\rho=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\vec{R}] \times ([\vec{R}_0] \times [\ddot{\vec{u}}])}{(z^2 + a^2)^{3/2} c^2}$$

$\omega^2 a z^2 [\hat{\rho}'] + \omega^2 a z \hat{z} - \frac{\omega^3 a^3}{c} [\hat{\phi}']$

El campo magnético se obtendrá a partir de la siguiente relación:

$$\vec{B}|_{p=0} = \frac{1}{r} [\hat{R}] \times \vec{E}|_{p=0} = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} (\vec{z} - \beta[\hat{p}']) \vec{E}|_{p=0}$$

en lo que solo quedará hacer productos vectoriales.

• EJEMPLOS CUESTIONES: Campos de cargas puntuales

* Si el campo magnético de una partícula que se mueve con velocidad \vec{u} es

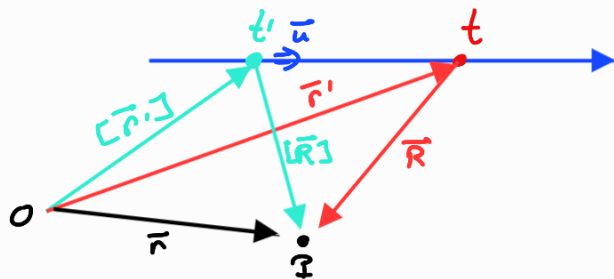
$$\vec{B} = \frac{1}{cR} [\vec{R}] \times \vec{E}$$

Si $\vec{u} = c\vec{e}$, ¿cómo quedaría \vec{B} ?

(a) $\vec{0}$ (b) $\frac{1}{cR} \vec{R} \cdot \vec{e}$ (c) $\frac{1}{c^2 R} \vec{R} \cdot \vec{e}$ (d) $\frac{1}{c} \vec{u} \times \vec{e}$

La respuesta viene en la teoría, con lo que ya sabemos que la respuesta es (d).

Para justificarlo note que



Está claro que $\vec{r}' = [\vec{r}'] + \vec{u} \frac{[R]}{c}$. Interpretación:

\vec{r}' : Donde está la partícula ahora (en t)

$[\vec{r}']$: Donde estaba la partícula en t' (en el momento en el que generó el campo que

llega en t a P)

$\vec{u} \frac{[R]}{c}$: Velocidad de la partícula. (Tiempo que tarda el campo en llegar a P)

De esta forma escribimos: $[\vec{R}] = \vec{r} - [\vec{r}'] = \vec{r} - (\vec{r}' - u \frac{[R]}{c}) = \vec{R} + u \frac{[R]}{c}$

Tomando \vec{E} creado por una partícula puntual:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{R}_0}{r^2 s^3} + \frac{[\vec{R}] \times (\vec{R}_0 \times [\dot{\vec{u}}])}{c^2 s^3} \right]$$

Como $\vec{u} = c\hat{e}$ la posición virtual de la partícula \vec{r}_0 coincide con la que tiene realmente:

$$\vec{R}_0 = \vec{r} - \vec{r}_0 = [\vec{R}] - [\vec{u}] \frac{[R]}{c} = [\vec{R}] - \vec{u} \frac{[R]}{c} = \vec{R} + \vec{u} \frac{[R]}{c} - \vec{u} \frac{[R]}{c} = \vec{R}$$

Así, $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{r^3}$ y

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [\hat{R}] \times \vec{E} = \frac{1}{c} \left(\vec{R} + \vec{u} \frac{[R]}{c} \right) \frac{1}{[R]} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{u} \times \vec{E}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

* De las relaciones entre campos de una partícula cargada

A. $\vec{B} = \frac{1}{c} [\vec{R}] \times \vec{E}$

B. $\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{u}] \times \vec{E}$

¿alguna se deduce de la otra en algún caso particular?

(a) A (b) B (c) Ninguna (d) Son equivalentes

Del y como vimos en la cuestión anterior, si $\vec{u} = c\hat{e}$ B se deduce de A. (b)

Electrodinámica Clásica

BLOQUE III

ELECTROMAGNETISMO y RELATIVIDAD ESPECIAL

"A menudo se ha dicho, y no sin justificación por cierto,
que el hombre de ciencia es un filósofo de mala calidad"

A. Einstein

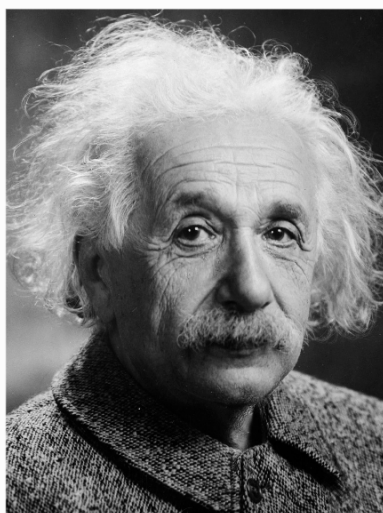
Electrodinámica Clásica

TEMA 7

Relatividad Especial

y

Formulación Covariante



Blogue Introductorio: Teoría de la Relatividad Especial

Postulados. Transformaciones de Lorentz

La Teoría de la Relatividad Especial, tal y como la formuló A. Einstein, se fundamenta en dos sencillos postulados:

I. Las leyes de la Física deben adoptar la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales.

II. La velocidad de propagación de la luz en el vacío, medida desde cualquier sistema de referencia inercial es una constante universal.

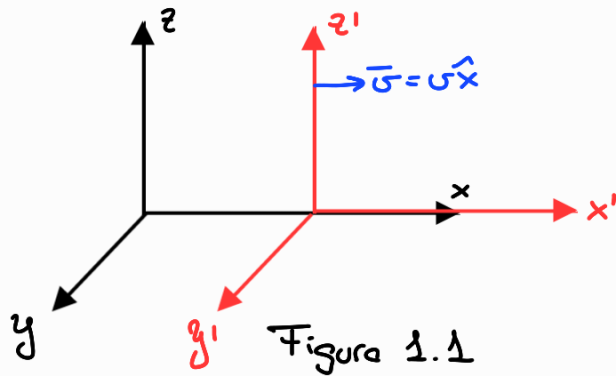
A partir de estos postulados es posible deducir las transformaciones de Lorentz, relacionan los coordenados en un SRI S' que se mueve con velocidad \vec{v} con respecto a otro SRI, S . de forma más clásica de presentarlo es admitiendo que S, S' comporten eje x y $\vec{v} = v\hat{x}$: (ver figura 1.1)

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - v/c^2 x) \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ es el famoso factor de Lorentz. En el caso general:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{r})}{\beta^2} \vec{\beta} - \gamma \vec{\beta} ct \\ t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{r}}{c} \right) \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $\beta = \frac{v}{c}$. Es importante apreciar que, para $v \ll c$, $\gamma \approx 1$ y recuperamos las transformaciones de Galileo. Por tanto, la Mecánica Clásica Newtoniana es el límite a bajas velocidades de la Teoría de la Relatividad Especial.



Las transformaciones inversas se obtienen intercambiando $x, y, z \mapsto x', y', z'$ $v \mapsto -v$:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{cases} \quad (1.3)$$

• Consecuencias de las transformaciones de Lorentz

Un **evento/suceso** es cualquier proceso físico que ocurre en un cierto instante de tiempo y en un cierto punto del espacio. Para cada SRI suponemos la existencia de un observador que etiquetará el evento con unas coordenadas espacio-temporales.

Las transformaciones de Lorentz relacionan entonces las coordenadas que perciben observadores en SRI distintos. Estudiaremos ahora una serie de casos particulares que reflejen los constructivos que pueden llegar a ser.

↳ Relatividad de la simultaneidad

Decimos que dos eventos son simultáneos si, en un SRI tienen una misma coordenada temporal: $A = (t, x_A, 0, 0)_S$ $B = (t_B, x_B, 0, 0)_S$. Nos preguntamos ahora ¿Son simultáneos también para un SRI S' con la situación presentada en la figura 1.1. ? Empleando las transformaciones de Lorentz:

$$x'_A = \gamma(x_A - vt) ; \quad x'_B = \gamma(x_B - vt)$$

$$t'_A = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_A\right); \quad t'_B = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_B\right)$$

Así $t'_A - t'_B = \frac{v}{c^2}(x_B - x_A) \neq 0$ (no necesariamente, solo $v=0$, $x_B = x_A$).

Concluimos que:

* Dos eventos que son simultáneos en un cierto sistema de referencia inercial, no tienen por qué serlo en otro sistema de referencia inercial

↳ Dilatación temporal

Sean A, B dos eventos que en un cierto SRI S tienen asociadas las mismas coordenadas espaciales, pero diferente coordenada temporal.

$$A = (t_A, \vec{r})_S \quad B = (t_B, \vec{r})_S$$

Definiremos el **TIEMPO PROPIO** como el intervalo de tiempo entre dos eventos que ocurren en el mismo punto (espacial) para ese sistema de referencia.

¿Cómo es ese intervalo en el SRI S' ya mencionado?

Empleamos las transformaciones de Lorentz:

$$t'_A = \gamma (t_A - v/c^2 x) ; t'_B = \gamma (t_B - v/c^2 x)$$

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma t_B - \gamma t_A = \gamma \Delta t_p$$

$$\boxed{\Delta t' = \gamma \Delta t_p}$$

Donde Δt_p es el tiempo propio. Como $\gamma \geq 1$ $\Delta t' \geq \Delta t_p$. Así,

* Si en un SRI dos eventos tienen mismas coordenadas espaciales y diferentes coordenadas temporales el intervalo de tiempo entre ellos es el tiempo propio, y en cualquier otro sistema de referencia inercial, el intervalo de tiempo entre esos eventos es mayor o igual al tiempo propio.

↳ Contracción de Longitudes

Consideremos dos eventos $A = (t_A, x_A, 0, 0)$ $B = (t_B, x_B, 0, 0)$ que representan la medición de longitud de un objeto móvil en el sistema de referencia: x_A indica un extremo y x_B otro. La longitud medida desde un sistema de referencia móvil al objeto a medir se denomina longitud propia $\Delta l_p \equiv x_B - x_A$.

¿Qué longitud medirá un observador S' para el cual el objeto está en movimiento?

Dado que el objeto está en movimiento es necesario para ese observador comparar los extremos en un mismo instante de tiempo: $t'_A = t'_B = t'$. Por las transformaciones de Lorentz:

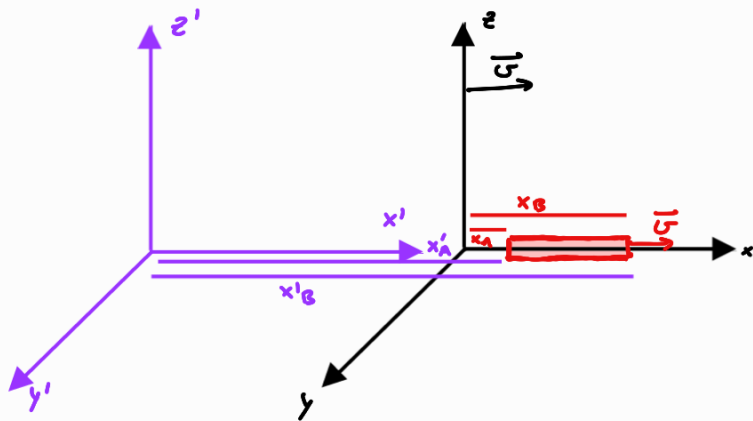
$$x_A = \gamma (x'_A + v t')$$

$$x_B = \gamma (x'_B + v t')$$

Resultando $\Delta l_p = x_B - x_A = \gamma (x'_B - x'_A) = \gamma \Delta l'$

$$\boxed{\Delta l' = \frac{\Delta l_p}{\gamma}}$$

* Si en un sistema de referencia inercial un objeto está fijo en su longitud en dicho SRI, su longitud es su **LONGITUD PROPIA** y en cualquier otro SRI su longitud será **igual o menor que la propia**. Este efecto es conocido como **contracción de Fitzgerald-Lorentz**.



Es importante recordar que las direcciones perpendiculares al movimiento no experimentan contracción alguna.

En los problemas de este tema habitualmente vamos a tener que trabajar con vectores (vector posición, unitarios etc) que evidentemente pueden ser diferentes según el SRI considerado. Estudiemos ahora bajo que condiciones un vector \vec{R} verifica $\vec{R} \parallel \vec{R}'$, esto es, su dirección se conserve en el otro SRI, S' (Ejercicio B7-1a)

Apreciamos que $\vec{R} \parallel \vec{R}' \Rightarrow \vec{R} \times \vec{R}' = \vec{0}$. Dada la expresión de \vec{R} , la de \vec{R}' se puede obtener mediante $\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{r})}{\beta^2} \vec{\beta} - \gamma \vec{\beta} ct$ y si consideramos la medida de la dirección de \vec{R} en $t=0$,

$$\vec{R}' = \vec{R} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{R}) \vec{\beta}$$

$$\text{Así: } \vec{R} \times \vec{R}' = \vec{R} \times \vec{R} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\vec{R} \times \vec{\beta}) (\vec{\beta} \cdot \vec{R}) = \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\vec{R} \times \vec{\beta}) (\vec{\beta} \cdot \vec{R}) = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \times \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} \parallel \vec{\beta} \\ \vec{R} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{R} \perp \vec{\beta} \end{array} \right.$$

y podemos concluir:

* Se conservan únicamente las direcciones paralelas y perpendiculares al movimiento.

Introducción a la notación tensorial

La notación en cuatrivectores consiste en expresar los coordenados de un suceso mediante un **cuatrivector**:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$$

Nótese que se use un superíndice griego, esto indica que $\mu = 0, 1, 2, 3$ mientras que los índices latinos solo tratan los componentes espaciales $i = 1, 2, 3$.

Podemos encontrar una forma de expresar todo esto de manera más compacta.

Definiremos la **MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ** como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y empleando la notación de cuatrivectores se aprecia que

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Por un movimiento arbitrario x será el componente de \vec{r} paralela al movimiento. Por la isotropía del espacio las transformaciones serán válidas en cualquier dirección del espacio. Podemos escribir las transformaciones como:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x})$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) - \gamma \vec{\beta} x^0$$

o lo que es lo mismo:

$$x'^0 = \gamma(x^0 + \vec{\beta} \cdot \vec{x})$$

$$x'_{||} = \gamma(x_{||} + \beta x^0)$$

$$\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}$$

Un **cuadrivector** es una **magnitud representada en un cierto SRI por cuatro coordenadas en la forma:**

$$A^{\alpha} = (A^0, \vec{A})$$

que en otros SRI S' con velocidad $\beta c = v$ respecto al primero toma los valores:

$$A'^0 = \gamma(A^0 + \beta A_{||})$$

$$A'_{||} = \gamma(A_{||} + \beta A^0)$$

$$A'_{\perp} = A_{\perp}$$

(*)

Apreciamos que

$$(A'^0)^2 - A'^2_{||} - A'^2_{\perp} = \gamma^2 (A^0 + \beta A_{||})^2 - \gamma^2 (A_{||} + \beta A^0)^2 - A^2_{\perp}$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2} \left[(A^0)^2 + (\beta A_{||})^2 + 2\cancel{\beta A^0 A_{||}} - (\beta A^0)^2 - (A_{||})^2 - \cancel{2\beta A^0 A_{||}} \right] - A_{\perp}^2 :$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2} \left[(1-\beta^2)(A^0)^2 + (1-\beta^2)(A_{||})^2 \right] - A_{\perp}^2 = (A^0)^2 - (A_{||})^2 - A_{\perp}^2$$

Deducimos que los cuadriectores verifican la siguiente relación para cualquiera SRT S, S'

$$(A'^0)^2 - |A'|^2 = (A^0)^2 - |A|^2$$

Si definimos la métrica de Minkowski como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de modo que podemos expresar la norma de un cuadriector A^{μ} como

$$g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = (A^0)^2 - |A|^2$$

* Las transformaciones de Lorentz conservan la norma: la norma de un cuadriector es un invariante relativista (escalar) y la transformación de Lorentz es ortogonal.

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = g_{\mu\nu}$$

Buena parte de la bibliografía define la métrica de Minkowsky con los signos cambiados a los mostrados anteriormente. Aunque es totalmente equivalente hay que tener cuidado con que expresión de la métrica se está trabajando.

Un covector escrito en la forma $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ se dice **contravariante** o en **forma contravariante** (o con "índice subidos"). Diremos que el **covector covariante** (o en **forma covariante** o con índices bajados) a_μ es

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

esto es $a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, a^3)$. Esto es el covector que da igual excepto por un cambio de signo en los coordenados espaciales. Esto es aplicable también a tensores de orden 2:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} F^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu}$$

Definiremos el producto escalar de Minkowsky (o 4-producto escalar) de dos covectores a, b como:

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = +a^0 b^0 - (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3)$$

esto es, como el producto escalar de siempre pero con un cambio de signo. Una propiedad fundamental de dicho producto radica en que es un invariante relativista:

$$\begin{aligned} a'_\mu b'^\mu &= a^{0'} b^{0'} - a^{i'} b^{i'} = \gamma^2 (c^0 - \beta a^1) (b^0 - \beta b^1) - \gamma^2 (a^2 - \beta a^0) (b^2 - \beta b^0) - a^3 b^3 \\ &= a^0 b^0 - a^i b^i = a_\mu b^\mu \end{aligned}$$

Por último, una notación bastante usada en este tema (aunque no por el Prof. Fondob) que puede resultar interesante por su escritura (y en mi opinión dando un poco de claridad) consiste en escribir los derivadores como:

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

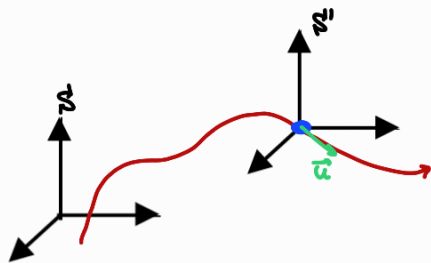
Por ejemplo, $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial (ct)}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}$. También es aplicable en variables contravariantes:

$$\partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$$

Obsérvese que el concepto índice subido/bajado está invertido para los derivadores frente a los coordenados.

• Tiempo propio

Hemos admitido anteriormente que el tiempo medido en el SRI propio es un invariante, lo que es necesariamente lógico pues es la única manera de comparar tiempos en sistemas de referencia distintos. No obstante esto no es aplicable (al menos inicialmente) a un misil cuya velocidad $\vec{u} = \vec{u}(t)$ es variable. Estudiamos este caso en detalle:



Sea una partícula que por un SRI S se mueve con velocidad $\vec{u}(t)$ y sea S' un SR que se mueve con velocidad $\vec{v} = \vec{u}(t)$ con respecto a S , de forma que por un cierto instante t el misil estará en reposo con respecto a S' . Denotemos por $\vec{r}'(t')$ la ecuación del movimiento de la partícula en S' y sean los sucesos (t', \vec{r}') y $(t' + \Delta t', \vec{r}' + \Delta \vec{r}')$. Si denotamos τ el tiempo propio en el SR no inercial:

$$\lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta t'}{\Delta \tau} = 1$$

pues la transformación de tiempos debe tener derivada continua. Ya hemos demostrado que

$$(\Delta s')^2 = (c \Delta t')^2 - |\Delta \vec{r}'|^2$$

es un invariante relativista entonces $(\Delta s^2) = (\Delta s')^2$ y podemos escribir:

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t)^2 \left(1 - \left| \frac{\Delta \vec{r}'}{c \Delta t'} \right|^2 \right) = (c \Delta \tau)^2 \left(\frac{\Delta t'}{\Delta \tau} \right)^2 \left(1 - \left| \frac{\Delta \vec{r}'}{c \Delta t'} \right|^2 \right)$$

y si tomamos límites,

$$\frac{ds}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta z} = c \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right)^2 \left(1 - \left|\frac{v}{c}\right|^2\right)} = c$$

con lo que $\Delta s = c \Delta t$

* El tiempo propio es un invariante independientemente de si el movimiento es o noercial.

• Cuadrivector velocidad y cuadrivector aceleración

Las transformaciones de Galileo tienen como consecuencia una ley de adición de velocidades extremadamente sencilla. Como vamos a ver, esto no resulta tan sencillo en la TRF, como consecuencia de $t' \neq t$. Tomando nuestra pareja de SRI S, S' de siempre si una partícula tiene velocidad \bar{u} para S, ¿Qué velocidad tiene para S'? Nótese que:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

Así,

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)} = \frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \dot{x}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)} = \frac{u_y}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)} = \frac{u_z}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

que son las leyes de transformación de velocidades relativistas. Esto dice que esto se podría expresar de manera mucho más sencilla si la velocidad fuera un cuadvector. Teniendo en cuenta la relación entre cualquier intervalo de tiempo dt y el tiempo propio dz .⁽⁴⁾

$$\Delta t = \gamma \Delta z \quad \frac{dt}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta z} = \gamma$$

De esta forma definiremos la **CUADRIVELOCIDAD** como:

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dz} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{dz} = \gamma_u(c, \vec{u}) \quad \gamma_u \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Es decir, claro tenemos un cuadvector con $U^0 = \gamma c$ y $U^i = \gamma \vec{u}$. Sabemos que es un cuadvector porque es la derivada de un cuadvector con respecto a un invariante relativista y por lo tanto se transforma según (**). En general escribiremos

$$\vec{u}'_{||} = \frac{u'_{||} + \vec{v}}{1 + \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2}} ; \quad \vec{u}'_{\perp} = \frac{\vec{u}'_{\perp}}{\gamma(\Delta + \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2})}$$

Para el caso particular en el que los ejes x, x' coinciden con $\vec{v} = v\hat{x}$ para S' respecto a S :

$$U'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} U^{\nu}$$

Su invariante asociado es $U^\mu U_\mu = \gamma_u^2 c^2 - \gamma_u^2 u^2 = \frac{c^2}{c^2 - u^2} (c^2 - u^2) = c^2$

⁽⁴⁾ El Prof. Fombado demuestra esto de otra forma, seguramente más formal, pero también un tanto más críptico.

El **4-vector aceleración** viene definido por:

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau}$$

Se puede demostrar que de manera general:

$$a^\mu = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{c}, \gamma^4 \vec{a} + \gamma^4 \vec{v} \frac{\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{c^2} \right)$$

siendo su invariante:

$$a_\mu a^\mu = \gamma^6 |\dot{\vec{v}}|^2 + \gamma^4 |\vec{a}|^2$$

• El intervalo invariante

Si definimos el 4-vector desplazamiento se define dados dos eventos A, B con x_A^μ, x_B^μ :

$$\Delta x^\mu \equiv x_A^\mu - x_B^\mu$$

El producto escalar de Δx^μ consigo mismo es el denominado **intervalo invariante**

$$s^2 = (\Delta x)^\mu (\Delta x)_\mu = (\Delta x^0)^2 - \Delta x^i \Delta x^i = c^2 t^2 - |\vec{r}|^2$$

siendo t la diferencia de tiempos entre eventos y $|\vec{r}|$ la distancia entre ambos.

La condición $s^2 > 0$ define en el espacio de Minkowsky una hipersuperficie denominada **cono de luz**. Su vértice representa el aquí y ahora y sus puntos representan el pasado en el espacio tiempo de un impulso luminoso emitido en el presente. De esta forma según el signo de s^2 definiremos:

- $s^2 < 0$ **Intervalo tipo espacial** $|\vec{r}|^2 > ct^2$. El intervalo se haya fuera del cono de luz, no tiene relación causal con el presente pues para poder establecer relación entre ambos habría que tener $v > c$.

El **intervalo de separación** viene definido por:
ninguno en S_3 que sean S_3 locales.

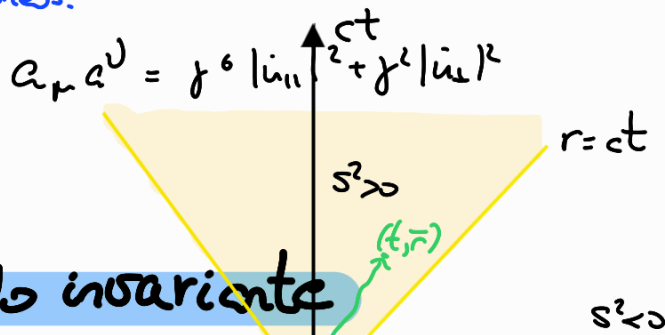
$$s^2 = 0: \text{ Intervalo tipo luz } \frac{d\mathbf{u}^n}{dt} |\mathbf{r}| = c dt$$

Se puede **demstrar que** **decomponer** **el intervalo**: Los intervalos se hacen en el interior del

cono y pueden estar **relacionados** **con el presente**, perteneciendo al pasado o al

futuro. Existirá algún SRI en el que sean S_3 -locales, pero ninguno en el que

siendo **su invariante** **sea simultáneos**.



El intervalo invariante

Si definimos el **4-vector desplazamiento** se define **dos** **eventos** A, B con x_A^μ, x_B^μ :

$$\Delta x^\mu = x_A^\mu - x_B^\mu$$

El **producto escalar** de $s^2 \Delta x^\mu$ consigo mismo es el denominado **intervalo invariante**

$$s^2 = (\Delta x)^\mu (\Delta x)_\mu = (\Delta x^0)^2 - \Delta x^i \Delta x^i = c^2 t^2 - |\mathbf{r}|^2$$

siendo t la diferencia de tiempos entre eventos y $|\mathbf{r}|$ la distancia entre ambos.

La condición $s=0$ define en el espacio de Minkowsky una hipersuperficie denominada **cono de**

luz. Su **vértice** representa el **aquí** y **ahora** y sus puntos representan el **pasado** en el

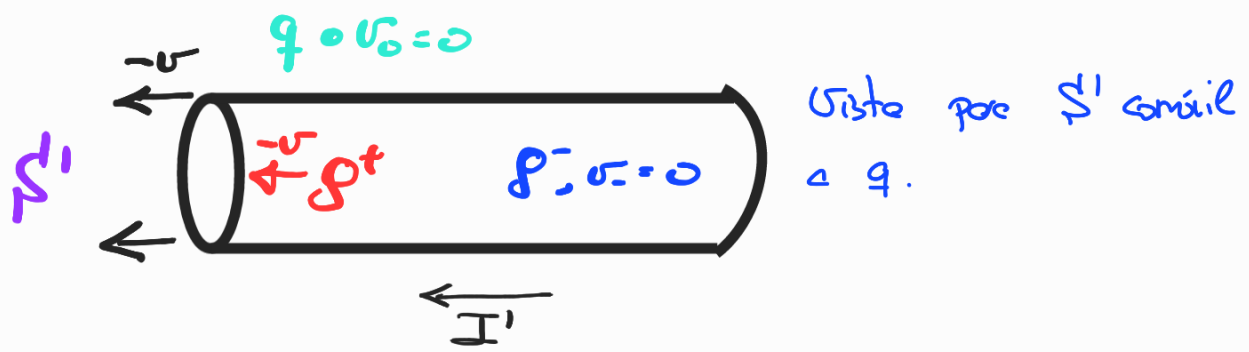
espacio tiempo de un impulso luminoso emitido en el presente. De esta forma según el signo

de s^2 definiremos:

• $s^2 < 0$ **Intervalo tipo espacial** $|\mathbf{r}|^2 > ct$. El intervalo se hace fuera del cono de Ca , no

tiene relación causal con el presente pues para poder establecer relación entre ambos habría

que $v > c$.



Para el SRI S' lo que se mueva son los portadores positivos del cable (que son aquellos que hacen el cable neutro). El movimiento de estos cargas hace aparecer un campo que llamaremos \vec{B}' . Sin embargo, encontramos aquí un problema: si para S' q no se mueve su velocidad es cero y

$$\vec{F}' = q \vec{v}' \times \vec{B}' = q \cdot 0 \cdot \vec{B}' = 0$$

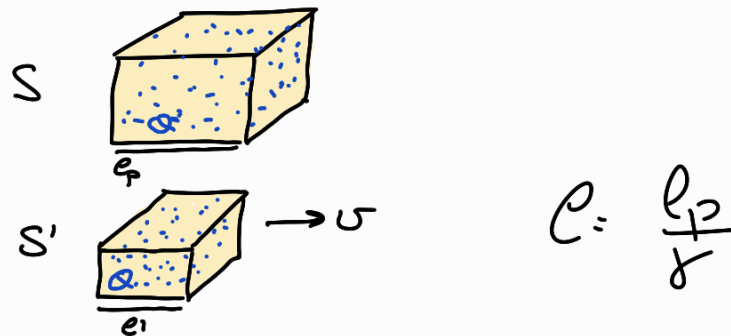
es decir: para un SRI lo portadora sufre una fuerza y en otro no. Esto evidentemente no tiene ningún sentido. El problema radica en que no hemos tenido en cuenta las consecuencias de las transformaciones de Lorentz

El objetivo de este tema es formular el Electromagnetismo tensorialmente, obteniendo las ecuaciones de transformación de los campos de un SRI a otro, así como de las fuentes (ρ, \vec{J}) y de las potenciales.

Decimos que una relación entre magnitudes tensoriales válida en cualquier SRI es covariante. La formulación covariante (o manifestamente covariante) del Electromagnetismo al conjunto de ecuaciones covariantes en el espacio de Minkowski que son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell y a las potenciales en tres dimensiones.

1. Cuadricorriente o 4-corriente

En un hecho experimental que la carga se conserva. Dado un volumen V con una cierta carga total Q , esta carga será la misma en todos SRI. No obstante sabemos que, como consecuencia de las transformaciones de Lorentz, las longitudes con componentes paralelas al movimiento se acortan con respecto a las que mide un SRI comóvil al objeto.



Por ejemplo, para un SRI S' que observe un cubo con carga total Q en reposo tendrá una densidad de carga $\rho = \frac{Q}{V}$. Sin embargo un SRI S para el cual los cubos (y el cubo) se mueven con velocidad v verá que $l' < l_p \Rightarrow V' < V \Rightarrow \rho' = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{l' l_p^2} = \gamma \frac{Q}{l_p^3} = \gamma \rho > \rho$

Generalizando estos resultados a cualquier volumen podemos escribir:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \rho_0$$

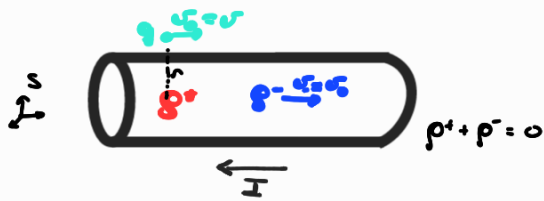
Densidad de carga en el SRI en el que están en reposo

Densidad de carga en el SRI en el que están en movimiento.

Este razonamiento permite explicar la aparente paradoja del cilindro atravesado por una intensidad de corriente de la introducción.

Recordemos cual era la situación para cada SRI

SRI S :



$$\vec{E} = \vec{0} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

- * q tiene velocidad v
- * Partículas cargadas negativamente se mueven hacia la derecha
- * Existe una densidad de carga $\rho^+ > 0$ de cargas en reposo que hace que el cable sea neutro.

Sistema que se mueve con velocidad v con respecto a S

SRI S' :



$$\vec{E}' = \vec{0} \quad \vec{B}' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} \hat{\phi} ?$$

- * la carga q está en reposo
- * las cargas negativas están en reposo
- * las cargas positivas son desde este sistema en que se mueven.

Ahora que ya hemos repasado los puntos de este problema está claro que no hemos tenido en cuenta que la densidad de carga en un sistema no es la misma que en otro sistema. Para la densidad de carga de cargas positivas:

$$\rho'_+ = \gamma \rho$$

pero en S' estas se hayan en reposo. Sin embargo para los negativos ocurre el contrario:

$$\rho'_- = \gamma \rho'$$

Así, S' observa que $\rho'_{total} = \rho'_+ + \rho'_- = 0$. ¡Pero por S' sí que hay densidad de carga!:

$$\rho'_{total} = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho}{\gamma} + \gamma \rho_- = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Como $\rho_+ = -\rho_-$:

$$\rho'_{total} = \rho_r \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} > 0$$

Es decir, para S' el cable estará cargado positivamente de forma que por la ley de Gauss

$$\vec{E}' = \frac{\rho'_{total} A}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{\rho}$$

y así la carga sufrirá una fuerza de magnitud

$$F' = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \frac{\rho_r A}{r} \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = \gamma F$$

que como podemos comprobar en el Griffiths o en apuntes de Relatividad Especial es un resultado coherente con la transformación de fuentes entre SRF. Además, para $v \ll c$ $F' \approx F$. Es importante apreciar que dependiendo de SRF observamos campos de distinto tipo (magnético / eléctrico y magnético).

Regresando a nuestro caso general, sabemos que para un sistema S que observa una densidad de carga en reposo, en otro SRF para el cual éste se mueve con velocidad v :

$$\rho = \gamma \rho_0$$

Para el sistema en que está en reposo la densidad de carga ésta será en este sistema una magnitud propia (invariante). Definiremos a partir de ella el **cuadrivector corriente**

o **cuadrivector corriente** como:

$$\mathcal{J}^\mu = \rho_0 u^\mu = \frac{\rho}{\gamma} (\gamma c, \gamma \vec{v}) = (c\rho, \vec{J})$$

Así, $\mathcal{J}^0 = c\rho$, $\mathcal{J}^i = J^i$

Al haber sido construido a partir de un cuadrivector, J^μ es también un cuadrivector. Puede apreciarse la elegancia de haber combinado en un único cuadrivector todos los frentes del campo electromagnético (parte de los propios campos).

Vamos ahora a escribir la primera expresión asociada con lo que trabajamos: la forma covariante de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 ;$$

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho)}{\partial(ct)}}_{\frac{\partial J^0}{\partial x^0}} + \underbrace{\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}}_{\frac{\partial J^i}{\partial x^i}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0$$

y empleando la notación de Einstein y $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

2. El Tensor de campo electromagnético

Ya hemos escrito una ecuación en forma covariante. Procederemos ahora con las ecuaciones de Maxwell. Está claro que vamos a necesitar de los componentes de la velocidad (para \vec{v} y ρ) pero también de algún arte matemático que guarde toda la información sobre los campos eléctrico y magnético. Para ello necesitamos 6 componentes, pero un cuadrivector tiene solo 4. Por ello emplearemos una matriz con restricciones sobre sus elementos, concretamente una matriz antisimétrica (o más formalmente un tensor de orden 2 antisimétrico⁽⁴⁾)

Vamos a definir entonces el **TENSOR DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO** o **TENSOR DE FARADAY** como

$$F_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

o en componentes covariantes:

$$F_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

⁽⁴⁾ Esto es, tal que $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$. Nótese que entonces $A^{\mu\mu} = 0 \forall \mu$.

La definición del tensor es en cierto modo arbitraria (los signos, el coeficiente $\frac{1}{c}$ pueden cambiar en la bibliografía). Lo importante es tener en cuenta de que definición partimos para escribir las ecuaciones posteriores, lo que necesitamos es una entidad matemática que nos permita escribir cualquiera de los campos invocados alguno de sus componentes $\mathcal{F}^{\mu\nu}$

• Ecuaciones de Maxwell inhomogéneas

Trabajemos primero en las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

Desarrollando la primera:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \mu_0 c \rho$$

$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathcal{F}^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathcal{F}^{30}}{\partial x^3} = \mu_0 J^0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{F}^{j0}}{\partial x^j} = \mu_0 J^0 \Rightarrow \partial_j \mathcal{F}^{j0} = \mu_0 J^0$$

Donde se ha hecho en cuenta que $\mathcal{F}^{00} = 0$. Por otro lado podemos escribir la componente x de la ley de Ampère-Maxwell como:

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 J_x \Rightarrow -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = \mu_0 J_x$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial \mathcal{F}^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathcal{F}^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathcal{F}^{31}}{\partial x^3} = \mu_0 J^1 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{F}^{j1}}{\partial x^j} = \mu_0 J^1$$

$= 0$

y podemos generalizar que para componente se tendrá que $\frac{\partial \mathcal{F}^{ji}}{\partial x^j} = \mu_0 J^i$

Podemos combinar ambas ecuaciones en una sola:

$$\partial_\nu \bar{F}^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu$$

Podemos comprobar fácilmente que:

- Si fijamos $\mu=0$ tendremos la ley de Gauss para el campo eléctrico.
- Si fijamos $\mu=1,2,3$ tendremos las ecuaciones de ley de Ampère-Maxwell para cada componente x, y, z .

Notese que el índice repetido ν indica sencillamente la suma.

• Ecuaciones de Maxwell homogéneas

Las ecuaciones de Maxwell homogéneas

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$$

pueden expresarse a partir de la siguiente ecuación

$$\partial_\lambda \bar{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \bar{F}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \bar{F}_{\lambda\mu} = 0$$

Como todos los índices van de $0 \rightarrow 3$ hay en verdad 4^3 ecuaciones. Notese que en cada término no hay índices repetidos, luego no hay sumatorios ocultos. Demostremos que esta ecuación nos da efectivamente a dichas ecuaciones, junto a una buena cantidad de ecuaciones redundantes o triviales

- Si $\mu = \nu = 0$ obtenemos $0 = 0$ porque $F^{\mu\nu} = 0$ $\forall \mu$.
- Si dos índices son iguales (ej: $\mu = 0$) $\partial_2 F_{00} + \partial_0 F_{02} + \partial_0 F_{20} = \partial_0 F_{02} - \partial_0 F_{02} = 0 = 0$
(otra ecuación trivial)
- Supongamos todos los índices diferentes y diferentes a cero (ej: $\mu = 1, \nu = 2, \lambda = 3$)

$$\partial_3 F_{12} + \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

esto es, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Obtenemos la ley de Gauss.

- Si un índice es igual a cero y el resto diferentes y diferentes de cero (ej: $\mu = 0, \nu = 1, \lambda = 2$)

$$\partial_2 F_{01} + \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)}_{-(\nabla \times \vec{E})_z} - \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

esto es, hemos llegado a la componente z de la ley de Faraday. Para otras combinaciones de este tipo obtenemos las componentes x, y.

Formulación covariante a partir de los potenciales

Estudiamos ahora la formulación anterior pero empleando los potenciales electromagnéticos.

Para ello definiremos el **covector potencial o cuadripotencial**:

$$\mathcal{A}^M = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)$$

Procedamos ahora a escribir la expresión tetradimensional del operador d'Alembertiano

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

esto es, el operador que aparece en la ecuación de ondas.

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial_i \partial_i - \partial_0 \partial_0 = -g^{00} \partial_0 \partial_0 - g^{ii} \partial_i \partial_i = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\partial^\mu \partial_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_\mu \partial x^\mu}$$

donde hemos aplicado que $g^{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu \neq \nu$. La forma de este operador muestra que es un invariante relativista (al estar expresado como un producto escalar). Esto representa la invariancia de la ecuación de ondas.

Mediante este operador y la definición del cuadripotencial está claro que la condición de Lorentz en formulación tensorial se puede expresar como

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \partial_i A^i + \partial_0 A^0 = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

y las ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales pueden expresarse mediante una única ecuación.

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow -\partial_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^0 = -\mu_0 \mathcal{J}^0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \Rightarrow -\partial_\nu \partial^\nu A^i = -\mu_0 J^i$$

Es decir

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$

El tensor de campo electromagnético puede expresarse a partir del cuadrivectorial, de hecho el Prof. Fondas emplea esto como definición del tensor de campo:

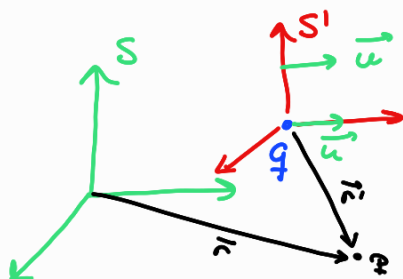
$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$$

La expresión anterior es el equivalente a las relaciones de los campos con los potenciales electromagnéticos.

• Potenciales de Liénard-Wiechert

Una de las ventajas de conocer cómo se transforman los potenciales electromagnéticos, al ser A^μ un cuadrivector real es que podemos obtener los potenciales electromagnéticos en ciertos SRI a partir de los potenciales en sistemas donde su cálculo es inmediato.

Por ejemplo, sea S' un SRI que observa una partícula cargada moverse en velocidad constante \vec{v} , ¿cuáles son los potenciales electromagnéticos creados por la carga?



Si nos situamos ahora en un SRI S' con velocidad u (velocidad de la partícula nula en este SRI) los potenciales son inmediatos

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \quad \bar{A}' = \vec{0}$$

esto es $A'^{\mu} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'}, 0, 0, 0 \right)$. Empleemos las transformaciones de Lorentz

$$A^{\mu} = \gamma A'^{\mu} = \phi = \gamma \phi'$$

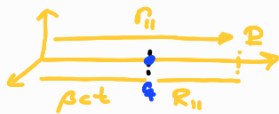
Sabiendo que $r'_{\parallel} = \gamma(r_{\parallel} - \beta ct)$; $r'_{\perp} = r_{\perp}$ $r' = \sqrt{\gamma^2(r_{\parallel} - \beta ct)^2 + r_{\perp}^2}$

$$\frac{\gamma}{r'} = \frac{1}{\sqrt{(\Delta - \beta^2) \frac{(r_{\parallel} - \beta ct)^2}{(\Delta - \beta^2)} + (\Delta - \beta^2) r_{\perp}^2}} = \frac{1}{\sqrt{(r_{\parallel} - \beta ct)^2 + (\Delta - \beta^2) r_{\perp}^2}}$$

Apréciase que:

$$(r_{\parallel} - \beta ct)^2 + (\Delta - \beta^2) r_{\perp}^2 = R_{\parallel}^2 + (\Delta - \beta^2) R_{\perp}^2 = (\Delta - \beta^2) (R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2) + \beta^2 R_{\parallel}^2 = \left(\Delta - \frac{u^2}{c^2} \right) R^2 + \left(\frac{u \cdot \vec{R}}{c} \right)^2$$

$$= S^2 = \left([R] - \frac{[\vec{R} \cdot \vec{u}]}{c} \right)^2$$



De esta forma
$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{S}$$

Para el potencial vectorial magnético

$$A'_{\parallel} = \gamma (A_{\parallel} - \beta \frac{\phi}{c}) = 0 \Rightarrow A_{\parallel} = \frac{u}{c^2} \phi$$

$$\bar{A}'_{\perp} = \bar{A}_{\perp} = \vec{0}$$

y

$$\bar{A} = \phi \frac{\vec{u}}{c^2}$$

Transformaciones de los campos

Ya hemos estudiado algunos casos de como los campos eléctrico y magnético se transforman de un SRI a otro. Como el ente matemático que representa el campo electromagnético es el tensor de Faraday o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ (en un cierto SRI) podemos obtener el campo electromagnético $F'^{\mu\nu}$ en otro SRI mediante la aplicación de la regla de transformación de Lorentz:

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F^{\mu\nu}$$

de aquí se deducen las expresiones de transformación de los campos:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma (\vec{E}_{\perp} + c \vec{\beta} \times \vec{B}) \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma (\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c} \vec{\beta} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

Suponiendo $\vec{v} = v \hat{x}$ y que los ejes x, x' de los SRI coinciden podemos escribir en coordenadas cartesianas (Griffiths):

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma (E_y - v B_z) & B'_y &= \gamma (B_y + \frac{v}{c^2} E_z) \\ E'_z &= \gamma (E_z + v B_y) & B'_z &= \gamma (B_z + \frac{v}{c^2} E_y) \end{aligned}$$

Hay dos casos especialmente interesantes:

• Campo eléctrico puro en S : $\vec{E} \neq \vec{0}$ $\vec{B} = \vec{0}$

$$B'_x = 0; B'_y = \gamma \frac{v}{c^2} E_z; B'_z = -\gamma \frac{v}{c^2} E_y$$

Entonces $\vec{B}' = \gamma \frac{v}{c^2} (E_z \hat{y} - E_y \hat{z}) = \frac{v}{c^2} (E_z \hat{y} - E_y \hat{z}) = -\frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}')$

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}')$$

• Campo magnético puro en S : $\vec{E} = \vec{0}$ $\vec{B} \neq \vec{0}$.

$$E'_x = 0; E'_y = -\gamma v B_z; E'_z = \gamma v B_y$$

Entonces $\vec{E}' = v (B_z \hat{y} - B_y \hat{z}) = \vec{v} \times \vec{B}'$

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}'$$

A partir de los campos podemos construir dos invariantes, denominados invariantes de

los campos.

* $2I_1 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Rightarrow I_1 = c^2 B^2 - E^2$. Este invariante es extremadamente útil para establecer de que tipo puede ser el campo electromagnético en otro SRI, dado como es en un SRI

• $I_1 < 0$: $c^2 B^2 - E^2 < 0 \Rightarrow E^2 > c^2 B^2$. $I_1 = I'_1 = c^2 B'^2 - E'^2 < 0$. Si para unos ciertos campos $I_1 < 0$, existirá un SRI donde el campo sea puramente eléctrico.

• $I_1 > 0$: $c^2 B^2 - E^2 > 0 \Rightarrow c^2 B^2 > E^2$. $I_1 = I'_1 = c^2 B'^2 - E'^2 > 0$. Existe algún SRI donde el campo podría ser puramente magnético.

• $I_1 = 0$: $c B = E$. Se trata de un campo electromagnético propagándose en el espacio libre sin fuente.

$$\#) \mathbf{I}_2 = \overline{B}_\parallel \cdot \overline{E}_\parallel + \overline{B}_\perp \cdot \overline{E}_\perp = \overline{E}_2 \cdot \overline{B}$$

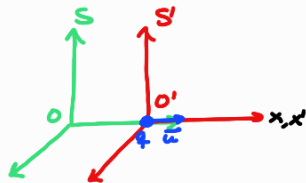
- Campo creado por una carga en movimiento uniforme

Vamos a emplear las ecuaciones de transformación de los campos para obtener los campos creados por una carga en velocidad constante \vec{u} . Por simplicidad vamos a suponer que $\vec{u} = u \hat{x}$.

En el sistema propio de la carga,

$$\overline{B}' = \vec{0} \quad \overline{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} \quad r' = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

porque en este sistema la partícula no se mueve.



Empleamos ahora las ecuaciones de transformación de los campos, pero en $\vec{u} \rightarrow -\vec{u}$.

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y(x-ut)}{[y^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{qyz}{[y^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{qyz}{[y^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

donde hemos descompuesto las expresiones anteriores de transformación de los campos teniendo en cuenta que x es la componente paralela a \vec{u} y y, z las perpendiculares

Considerando $t=0$,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{(y^2 + x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Si θ es el ángulo entre \vec{u} y \vec{r} . $x = r \cos \theta$, $z^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$

$$y^2 + x^2 + z^2 = y^2 + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = y^2 + r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = y^2 + r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)$$

Así

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}$$

Para obtener \vec{B} , teniendo en cuenta que $\vec{B}' = \vec{0}$, mediante las transformaciones de los campos llegamos a que:

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \times \vec{E}}{c^2}$$

Exemplo: Carga en movimiento uniforme

$$\beta = \frac{\mathbf{u}}{c}$$

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}}{r'^3}$$

• Σ propio

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \overbrace{(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{u}t)}^{\mathbf{R}_{\parallel}}}{[\gamma^2 (r_{\parallel} - \mathbf{u}t)^2 + r_{\perp}^2]^{3/2}} \\ \mathbf{E}_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}'_{\perp} - c \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}'_{\perp}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \overbrace{\mathbf{r}_{\perp}}^{\mathbf{R}_{\perp}}}{[\gamma^2 (r_{\parallel} - \mathbf{u}t)^2 + r_{\perp}^2]^{3/2}} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} (r_{\parallel} - \mathbf{u}t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} r_{\perp}^2 &= \underbrace{(r_{\parallel} - \mathbf{u}t)^2 + r_{\perp}^2}_{R^2} - \beta^2 \underbrace{r_{\perp}^2}_{R^2 \sin^2 \theta} = \\ &= R^2 - \frac{u^2 R^2}{c^2} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2 \sin^2 \theta\right]^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} &= 0 \\ \mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{B}'_{\perp} + \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}' \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}$$

• Transformación de las ondas planas

Para el caso de una onda plana:

- $I_1 = 0 \Rightarrow c^2 \mathbf{B} = \mathbf{E}^2$ de las relaciones entre los campos
- $I_2 = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$ equivale a $\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{B}}$.

dado que ambas cantidades son invariantes, una onda plana en un cierto SRT será una onda plana en otro SRT.

De las transformaciones de los campos se puede demostrar que

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}'_\perp &= \gamma [(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) \vec{\mathbf{E}}_\perp + (\vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \vec{\mathbf{E}}) \hat{\mathbf{n}}_\perp] \\ \vec{\mathbf{B}}'_\perp &= \gamma [1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}) \vec{\mathbf{B}}_\perp + (\vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{n}}_\perp]\end{aligned}$$

En el caso particular de las ondas planas monocromáticas, la fase

$$\varphi = -\vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \omega t$$

debe de ser un invariante pues dado el invariante I_1 si $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{0}}$ en cualquier otro SRT. Si definimos el cuadri-vector de onda

$$k^\alpha = (\omega/c, \vec{\mathbf{K}})$$

podemos escribir $\varphi = g_{\alpha\beta} k^\alpha x^\beta$ (lo que justifica que sea un cuadri-vector).

Empleando $\hat{\mathbf{k}} = \frac{c}{\omega} \hat{\mathbf{n}}$ llegamos a las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'_\parallel) \quad \omega \hat{\mathbf{n}}_\parallel = \gamma \omega' (\hat{\mathbf{n}}'_\parallel + \vec{\boldsymbol{\beta}}) \quad \omega \hat{\mathbf{n}}_\perp = \omega' \hat{\mathbf{n}}_\perp$$

de onde podemos deducir la ecuación de transformación de la frecuencia

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \approx \omega' (1-\beta) \quad \beta \ll 1$$

Efecto Doppler

Rebatiista

* Doppler Longitudinal $\vec{\beta} \parallel \vec{k}$, onda propagándose hacia el observador:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \approx \omega' (1-\beta) \quad \beta \ll 1$$

Para bajas velocidades se reduce al Doppler clásico.

* Doppler transversal: $\vec{\beta} \perp \vec{k}$

$$\omega = \omega' \sqrt{1-\beta^2} \approx \omega' \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right) \quad \beta \ll 1$$

* Ejemplos cuestiones TRÉ - Formulación Covariante.

* La impedancia de propagación en el espacio libre es...

- (a) no covariante (b) un 4-vector (c) un escalar relativista (d) un tensor de orden 2

Los (b), (d) son obviamente falsos. Vamos que $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\mu_0}{\mu_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = \mu_0 c$ es un escalar.

luego (c)

* ¿Cuánto vale el invariante no nulo de los campos de una carga puntual?

- (a) $E^2 - \gamma^2 ([\hat{R}] \times \vec{E})^2$ (b) $([\hat{R}] \cdot \vec{E})^2 - \gamma E^2$ (c) $-\gamma E^2$ (d) $-([\hat{R}] \cdot \vec{E})^2$

Dado \vec{E} de una carga puntual, $\vec{B} = \frac{1}{c} [\hat{R}] \times \vec{E} \Rightarrow I_2 = c^2 B^2 - E^2 = |[\hat{R}] \times \vec{E}|^2 - E^2 =$

$$= \underbrace{|[\hat{R}]|^2}_{1} E^2 - ([\hat{R}] \cdot \vec{E})^2 - E^2 = -([\hat{R}] \cdot \vec{E})^2. \quad (d)$$

Electrodinámica Clásica

Тема 8

Mecánica Relativista



1. Fuerza de Minkowsky

Recordemos del tema anterior la definición de la cuatricorrente:

$$J^\mu = (\rho c, \vec{J}) \quad J_\mu = (\rho c, -\vec{J})$$

Como la densidad de fuerza de Lorentz viene dada, como ya sabemos por

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

es natural pensar que empleando los elementos de la formulación covariante implicados (tenor de campo y cuatricorrente) podremos escribir la densidad de fuerza como un cuadvector.

Definimos así el **CUADRIVECTOR DENSIDAD DE FUERZA** como:

$$f^\alpha = F^{\alpha\beta} J_\beta = \left(\frac{w}{c}, \vec{f} \right)$$

Apréciense que:

- Para $\alpha = 1, 2, 3$ $f^i = f_x, f_y, f_z$ respectivamente.
- Para $\alpha = 0$ $f^0 = F^{0\beta} J_\beta = \frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{J} = \frac{w}{c}$ donde w es la potencia por unidad de volumen, recordemos que $\frac{dw}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$.

Todo esto puede ser más fácil de ver visualizando la operación como la multiplicación de una matriz por un vector.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho c \\ -J_x \\ -J_y \\ -J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{J} \cdot \vec{E}}{c} \\ \rho E_x + (\vec{J} \times \vec{B})_x \\ \rho E_y + (\vec{J} \times \vec{B})_y \\ \rho E_z + (\vec{J} \times \vec{B})_z \end{pmatrix}$$

La integral de este covector f^α en un volumen no es un 4-vector, pues el volumen no es un invariante relativista. No obstante la variación de momento Δp^α sí es un covector:

$$\Delta p^\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V f^\alpha dV \right\} dt = \int_{V^{(4)}} f^{(4)} dV^{(4)}$$

donde $V^{(4)}$ denota un 4-volumen, que sí será invariante (justificación en los puntos de Jordano).

Entonces si derivamos esta magnitud con respecto al tiempo propio, que ya sabemos que es un invariante, obtenemos un covector denominado **FUERZA DE MINKOWSKY**. K^α

$$K^\alpha \equiv \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \int_V \gamma f^\alpha dV$$

$$K^\alpha = \left(\gamma \frac{P}{c}, \gamma \vec{F} \right)$$

donde P es la potencia y \vec{F} la fuerza de Lorentz.

Para obtener la fuerza sobre una partícula supongamos que los campos⁽¹⁾ son constantes en el volumen V que contiene la carga:

$$\int_V j_\mu (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV = j_\mu (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \int_V \rho dV = j_\mu \underbrace{(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})}_\vec{F} q$$

$$\int_V j_\mu \frac{\vec{J} \cdot \vec{E}}{c} = \int_V \frac{j_\mu}{c} \rho \vec{u} \cdot \vec{E} dV = j_\mu q \frac{\vec{u} \cdot \vec{E}}{c}$$

Así, la fuerza de Lorentz que actúa sobre la partícula es

$$K^\alpha = \left(j_\mu q \frac{\vec{u} \cdot \vec{E}}{c}, j_\mu \vec{F} \right)$$

(1) campos externos

2. Tensor energía - momento

De manera análoga a como hemos procedido hasta ahora vamos a escribir en una sola ecuación covariante los teoremas de conservación del momento y la energía.

Recordemos la forma diferencial del Teorema de Poynting:

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -w \Rightarrow \frac{\partial u_{em}}{\partial x^0} + \frac{1}{c} (\partial_i S^i) = -\frac{w}{c} = -j^0$$

donde $S^i := S_{x,y,z}$ $i=1,2,3$. Por otro lado el Teorema de Conservación del momento se expresaba como:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p} + \epsilon_0 \int_V \vec{E} \times \vec{B} dV \right) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T}^M dV$$

donde \mathbf{T}^M es el tensor de Maxwell. Teniendo en cuenta que

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}^M)_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \partial_j T_{ij}$$

Entonces si $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$, $\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}\right)_i = \frac{\partial (cg^i)}{\partial x^0}$ y como $\vec{F} = \int \vec{f} dV$, poniendo la ecuación en forma diferencial:

$$-\vec{f} = \frac{\partial}{\partial x^0} (cg^i) - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j}$$

Observamos que (*) y (***) consisten en cantidades iguales a los componentes temporales o espaciales de la 4-fuerza. De esta forma, si definimos el

TENSOR DE ENERGÍA-MOMENTO ELECTROMAGNÉTICO.

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u_{em} & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ cg_x & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ cg_y & -T_{yx} & -T_{yy} & -T_{yz} \\ cg_z & -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz} \end{pmatrix}$$

que es un tensor simétrico en el espacio libre, podremos escribir la conservación de la energía y del momento por la elegante ecuación:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = -f^\alpha$$

3. El covector momento

El momento \vec{p} de una partícula se entiende como una magnitud vectorial que depende de la velocidad \vec{u} de la partícula, y por la isotropía del espacio $\vec{p} \parallel \vec{u}$, con lo que

$$\vec{p} = m(u) \vec{u}$$

Definiremos la masa propia m_0 como la masa (invariante) que tiene la partícula en un SRI comóvil a ella, es decir, donde está en reposo. De esta forma se definió el covector momento o cuadrimomento como

$$G^\alpha \equiv m_0 u^\alpha = \left(\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{u} \right)$$

La derivada de G^α con respecto a el tiempo propio τ es también un covector y lo natural sería que se correspondiese con la fuerza de Minkowski:

$$\frac{dG^\alpha}{d\tau} = K^\alpha$$

pues esto constituye una generalización de la Segunda Ley de Newton:

$$\frac{dG^0}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dG^0}{d\tau} = \frac{1}{\gamma} m_0 a^0 = m_0 \gamma^3 \frac{\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}}}{c} = \frac{\gamma^3}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_0 u^2 \right) = \frac{1}{\gamma} K^0$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_0 \vec{u}) = \frac{m_0}{\gamma} \left(\gamma^2 \dot{\vec{u}} + \gamma^4 \vec{u} \frac{\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}}}{c^2} \right)$$

Expresiones que si $\gamma_u \rightarrow 1$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_0 u^2 \right) = q \bar{u} \cdot \bar{E}$$

$$m_0 \dot{\bar{u}} = \bar{F}$$

dan lugar a las ecuaciones de la mecánica de Newton.

Al descomponer los campos en componentes paralelos y transversales:

$$\dot{\bar{u}}_{\parallel} = \frac{q}{m_0 \gamma_u^3} \bar{E}_{\parallel}$$

$$\dot{\bar{u}}_{\perp} = \frac{q}{m_0 \gamma_u} (\bar{E}_{\perp} + \bar{u} \times \bar{B})$$

vemos que el inercia de la partícula depende según el frente sea paralelo o perpendicular a \bar{u} . Definimos así:

$$m_{\parallel} = m_0 \gamma_u^3 \quad \text{Masa longitudinal}$$

$$m_{\perp} = m_0 \gamma_u \quad \text{Masa transversal.}$$

Con el objetivo de mantener una definición del momento de la forma $\bar{p} = m(\omega) \bar{u}$

definimos la **masa relativista** como

$$m \equiv \gamma m_0$$

Aunque muchos autores prefieren simplemente escribir $\bar{p} = m_0 \gamma_u \bar{u}$ por evitar el problema conceptual errático de que cambie la masa.

De esta forma:

$$\frac{d}{dt} (\gamma_u m_0 c^2) = \frac{d}{dt} (m c^2) = q \bar{u} \cdot \bar{E} = \frac{dW}{dt}$$

con lo que

$$E = m c^2 + \text{pot. } \leftarrow \text{no exp.}$$

que es la relación de Einstein masa-energía.

Además,

$$G^\alpha = (mc, m\vec{u}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{u}) \Rightarrow c G^\alpha = (E, c\vec{p}) \quad (\text{Es un covector})$$

$$\Rightarrow c^2 G^\alpha G_\alpha = E^2 - p^2 c^2 = \text{invariante}$$

y como es invariante deberá ser igual \forall SR1, en particular para un SR1 tal que

$\vec{u} = 0$:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$E_0 \equiv m_0 c^2$ es lo denominado ENERGÍA EN REPOSO y

$E_c \equiv (\gamma - 1) m_0 c^2$ es la ENERGÍA CINÉTICA.

* Ejemplos cuestiones Mecánica Relativista

* La parte espacial de la fuerza de Minkowski sobre una partícula tiene dirección...

(a) Del momento lineal (b) Aceleración (c) Tiempo de Lorentz (d) Velocidad de la partícula.

Por la definición de la fuerza de Minkowski

$$K^\alpha = \left(\gamma \frac{\mathbf{p}}{c}, \gamma \vec{F} \right)$$

$$K^i = \gamma F_i \Rightarrow \vec{K} = \gamma \vec{F} \Rightarrow \vec{K} \parallel \vec{F} \text{ donde } \vec{F} \text{ es la fuerza de Lorentz. (c)}$$

Ecuaci3s 3tiles

$$\frac{d}{dt}(U+W) + \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_{mec} + \mathbf{G}) = \oint_S \mathbf{T} \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{T} = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{I} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbf{I} \right) \quad (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{w} = \mathbf{u} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad \mathbf{L}_{em} = \varepsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dv$$

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad ; \quad \left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}$$

$$\left(\nabla^2 - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho_f + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_a}{\partial t} \quad ; \quad \left(\nabla^2 - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = -\mu \nabla \times \mathbf{J}_a$$

$$\mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xrightarrow{c} (\beta - i\alpha)^2 \quad Q = \frac{\omega \varepsilon}{\sigma} \ll 1 \Rightarrow \alpha, \beta \cong \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad Z_s \cong (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$$

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad ; \quad t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F}_{\perp} \\ \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\perp} \psi &= \nabla_{\perp} \cdot (\hat{\mathbf{u}} \psi) \\ \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\perp} \times \mathbf{F} &= \nabla_{\perp} \cdot (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{u}}) \\ \nabla_{\perp}^2 \psi &= \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \psi \\ \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\perp}^2 \mathbf{F} &= \nabla_{\perp}^2 (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F}) \end{aligned} \right\}, \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{v_f} = \beta_z = \sqrt{\beta^2 - \beta_c^2} \\ v_f v_g = c^2 \end{aligned} \right\} \quad \psi|_{z=0} = (A_x \cos \beta_x x + B_x \text{sen } \beta_x x) (A_y \cos \beta_y y + B_y \text{sen } \beta_y y) \left\{ \begin{aligned} \beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta_c^2 \end{aligned} \right.$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H})_{\perp} = -\frac{i\beta_z}{\beta_c^2} \nabla_{\perp} (E, H)_z \quad \mathbf{E}^{(TE)} = -\frac{\beta}{\beta_z} Z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}^{(TE)} \quad \mathbf{H}^{(TM)} = \frac{\beta}{\beta_z} \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}^{(TM)}$$

$$Q = \frac{\omega_0 U}{P_{dis}} \quad P_{dis} \cong \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \int_S |H|^2 da$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda \\ \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g \Rightarrow \psi = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{[g]}{R} dv'$$

$$\nabla[\rho] = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}}[\dot{\rho}] \quad \nabla \cdot [\mathbf{J}] = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \cdot [\dot{\mathbf{J}}] \quad \nabla \times [\mathbf{J}] = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times [\dot{\mathbf{J}}]$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} [\rho] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} [\dot{\rho}] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\dot{\mathbf{J}}]}{R} dv'$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} [\rho] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' + \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{V'} \frac{2(\hat{\mathbf{R}} \otimes \hat{\mathbf{R}})[\mathbf{J}] - [\mathbf{J}]}{R^2} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times [\dot{\mathbf{J}}])}{R} dv'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\mathbf{J}] \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V'} \frac{[\dot{\mathbf{J}}] \times \hat{\mathbf{R}}}{R} dv'$$

$$\mathbf{E}_{lm}^{(E)} = -\frac{Z_0}{kr} \left[\hat{\mathbf{r}} l(l+1) R_l^* Y_{lm}^* + \frac{d}{dr} (r R_l^*) r \nabla Y_{lm}^* \right] \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{H}_{lm}^{(E)} = i R_l^* \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}^* \\ \mathbf{E}_{lm}^{(M)} = -\frac{Z_0}{kr} \left[\hat{\mathbf{r}} l(l+1) R_l^* Y_{lm}^* + \frac{d}{dr} (r R_l^*) r \nabla Y_{lm}^* \right] \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_{lm}^{(M)} = i Z_0 R_l^* \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}^* \\ \mathbf{H}_{lm}^{(M)} = \frac{1}{kr} \left[\hat{\mathbf{r}} l(l+1) R_l^* Y_{lm}^* + \frac{d}{dr} (r R_l^*) r \nabla Y_{lm}^* \right] \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{E} = \frac{-pk^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ikr}}{kr} \left\{ \hat{\mathbf{r}} \left[-\frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] 2 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin \theta \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{H} = -\frac{1}{Z_0} \frac{pk^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ikr}}{kr} \hat{\boldsymbol{\phi}} \left[1 - \frac{i}{kr} \right] \sin \theta \\ P_{rad} = \frac{p^2 ck^4}{12\pi\epsilon_0} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_0 R_l^*(r) A_{lm}^{(E)} = -\frac{k}{l(l+1)} \oint Y_{lm} \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} d\Omega \\ R_l^*(r) A_{lm}^{(M)} = \frac{k}{l(l+1)} \oint Y_{lm} \mathbf{r} \cdot \mathbf{H} d\Omega \\ A_{lm}^{(E,M)} = -\frac{k^2}{l(l+1)Z_0} \int_{V'} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{I} \mathbf{E}_{lm}^{*(E,M)} dv' \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_{lm} = \frac{Z_0}{2k^2} l(l+1) \\ P = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l l(l+1) \left\{ |A_{lm}^{(E)}|^2 + |A_{lm}^{(M)}|^2 \right\} \\ \frac{d\mathcal{L}_{lm}}{dt} = \hat{\mathbf{z}} \frac{m}{\omega} \mathcal{P}_{lm} \end{array} \right\}$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s} \quad ; \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\mathbf{u}]}{s} = \phi \frac{[\mathbf{u}]}{c^2} \quad ; \quad s = [R] - \frac{[\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}]}{c}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{R}_0}{\gamma^2 s^3} + \frac{[\mathbf{R}] \times (\mathbf{R}_0 \times [\dot{\mathbf{u}}])}{c^2 s^3} \right\} \quad ; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} [\hat{\mathbf{R}}] \times \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

$$\frac{d}{dt'} \left(\frac{dU}{d\Omega} \right) = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{[R]}{s^5} \{ [\mathbf{R}] \times (\mathbf{R}_0 \times [\dot{\mathbf{u}}]) \}^2 \quad ; \quad \frac{dU_{rad}}{dt'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (\gamma^6 [\dot{\mathbf{u}}_{\parallel}]^2 + \gamma^4 [\dot{\mathbf{u}}_{\perp}]^2)$$

$$X'^{\alpha} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} X^{\mu} \Leftrightarrow \begin{cases} X'^0 = \gamma(X^0 - \beta X_{\parallel}) \\ X'_{\parallel} = \gamma(X_{\parallel} - \beta X^0) \\ \mathbf{X}'_{\perp} = \mathbf{X}_{\perp} \end{cases}$$

$$U^{\alpha} = (\gamma_u c, \gamma_u \mathbf{u}) \quad a^{\alpha} = \frac{\partial U^{\alpha}}{\partial \tau} = \left(\gamma_u^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c}, \gamma_u^2 \dot{\mathbf{u}} + \gamma_u^4 \mathbf{u} \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2} \right)$$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}'_{\parallel}}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2}} ; \quad \mathbf{u}_{\perp} = \frac{\mathbf{u}'_{\perp}}{\gamma \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right)}$$

$$g^{\alpha} = \frac{\rho}{\gamma_v} U^{\alpha} = (\rho c, \mathbf{J})$$

$$\mathcal{A}^{\alpha} = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} &= 0 \\ \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} &= \mu_0 J^{\beta} \end{aligned} \right\}$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{A}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{A}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E_x & \frac{1}{c} E_y & \frac{1}{c} E_z \\ -\frac{1}{c} E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c} E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c} E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} ; \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + c \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} ; \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= c^2 B^2 - E^2 \\ I_2 &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma[(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{E}_{\perp} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \hat{\mathbf{n}}_{\perp}] \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma[(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{B}_{\perp} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \hat{\mathbf{n}}_{\perp}] \end{aligned} \right\}$$

$$k^{\alpha} = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right) \quad \omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}}$$

$$f^{\alpha} = \left(\frac{w}{c}, \mathbf{f} \right) \quad K^{\alpha} = \gamma_u \left(q \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}}{c}, \mathbf{F} \right) \quad G^{\alpha} = \gamma_u m_0(c, \mathbf{u}) \quad \gamma_u \frac{dG^{\alpha}}{dt} = K^{\alpha}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{\parallel} &= \frac{q}{m_0 \gamma_u^3} \mathbf{E}_{\parallel} \\ \dot{\mathbf{u}}_{\perp} &= \frac{q}{m_0 \gamma_u} (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \right\}$$

$$\mathcal{E}^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u_{em} & \frac{1}{c} \mathbf{S} \\ c\mathbf{g} & -\mathbf{T}^M \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = -f^{\alpha}$$